REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

PROBLEMAS ESCOLARES DE MATEMÁTICA Y LA POSIBILIDAD DE QUE LOS PROFESORES LOS TRANSFORMEN EN MODELOS

María Paz Gazzola

mpgazzola@niecyt.exa.unicen.edu.ar

NIECyT, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina.
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Argentina.

Resumen

En este trabajo se presentan los resultados de una investigación que se desarrolló en un curso on-line de Didáctica de las Matemáticas, que pertenece a la carrera Licenciatura en Educación Matemática (LEM) de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Durante este curso, se estudia la Teoría Antropológica de lo Didáctico y conforme a ella se promueven cambios en la enseñanza. En este contexto se les propone a 35 profesores en servicio del nivel secundario que resuelvan ciertos problemas escolares de matemática desde la perspectiva de la modelización. Si bien estos profesores tienen la iniciativa de realizar de cambios en su enseñanza, los resultados evidencian sus dificultades con la modelización porque esta actividad es ajena a las prácticas escolares habituales.

Palabras clave: Formación de profesores, enseñanza de la matemática, TAD, problemas escolares, modelización.

School math problems and the possibility for teachers to transform them into models

Abstract

This paper presents the results of a research carried out in an on-line course on Didactics of Mathematics, which belongs to the Bachelor's degree in Mathematics Education (LEM) of the National University of the Center of the Province of Buenos Aires. During this course, the Anthropological Theory of Didactics is studied and, according to it, changes in teaching are promoted. In this context, we propose to 35 teachers in service at the secondary level that they solve certain school mathematics problems from the perspective of modeling. Although these teachers have the initiative to make changes in their teaching, the results show their difficulties with modeling because this activity is alien to normal school practices.

Keywords: Teacher training, mathematics teaching, ATD, school problems, modelling.

Problèmes de mathématiques à l'école et la possibilité pour les enseignants de les transformer en modèles

Résumé

Ce travail présente les résultats d'une recherche menée dans un cours en ligne de Didactique des mathématiques, qui appartient à la carrière Bachelor of Mathematical Education (LEM) de l'Université nationale du Centre de la Province de Buenos Aires. Dans ce cours, la théorie anthropologique de la didactique est étudiée et, conformément à celle-ci, des changements dans l'enseignement sont promus. Dans ce contexte, il est proposé à 35 enseignants en service du niveau secondaire de résoudre certains problèmes scolaires de mathématiques du point de vue de la modélisation. Bien que ces enseignants aient l'initiative de faire des changements dans leur enseignement, les résultats mettent en évidence leurs difficultés avec la modélisation parce que cette activité est en dehors des pratiques scolaires habituelles.

Mots clés: Formation des enseignants, enseignement des mathématiques, TAD, problèmes scolaires.

1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo es parte de un conjunto de investigaciones relativas a la formación de profesores de matemática del nivel medio, cuyo objetivo es promover cambios en la enseñanza en el sentido propuesto por la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Otero, 2021; Otero, et al., 2021). Se busca contribuir a una transición del paradigma escolar dominante de la visita de obras, donde el encuentro con los saberes es intrínseco, al paradigma didáctico emergente del cuestionamiento del mundo, en el cual se enfatiza el papel de las preguntas y encuentro con los saberes está motivado por las necesidades del estudio. En este último, se destaca la importancia de la modelización, como una actividad que posibilita una enseñanza de la matemática útil y funcional para el estudio de problemas.

En el marco de la TAD, se ha abordado desde diferentes perspectivas el problema de la introducción de la modelización en la formación de profesores de matemática (Bolea, 2002; Barquero, et al., 2011, Otero, 2021). Si bien en la actualidad los Recorridos de Estudio y de investigación son los dispositivos que la TAD propone para integrar actividades de modelado en la enseñanza, los profesores tienen dificultades para tratar con ellos, tanto para estudiar las preguntan vinculadas a un REI como para organizar una enseñanza a partir de este tipo de dispositivo (Otero, 2021; Otero, Gazzola, Llanos, 2021). Estos resultados están vinculados a que los REI están demasiado alejados de la realidad escolar.

Parece, entonces, ser necesario cierto gradualismo en los dispositivos que se emplean, en el sentido de la “distancia” que deben guardar con aquellos que son parte de las prácticas usuales. Por esta razón, en investigación recientes (Gazzola, Otero, 2022) utilizamos dispositivos más próximos a los profesores, o al menos que están en los libros de texto o son similares a los que allí se encuentran, es decir que involucran praxeologías propias del saber a enseñar que está en los programas y que se enseña.

Realizamos un estudio exploratorio previo con 39 profesores de matemática en servicio mientras realizaban un curso on-line de didáctica en la universidad. Al inicio del curso se les propuso resolver y analizar problemas escolares algebraicos. Los profesores tuvieron dificultades para dar solución a los problemas más allá de aquellas institucionalizadas en la escuela y también para pensar en ellos en términos de modelos matemáticos (Íbid, 2022).

En este trabajo se presentan los resultados de un segundo estudio realizado con 35 profesores de matemática en servicio mientras realizaban el mismo curso de didáctica en la universidad. En este caso, se propusieron otros problemas de matemática escolares y su tratamiento no se realizó al inicio del curso sino durante la unidad correspondiente a los fundamentos de la TAD y la modelización. La denominación “problema escolar” se debe a que son considerados como problemas en la escuela secundaria, se trata de tipos de tareas que aparecen en los manuales escolares y el currículum, documentos que los profesores consultan casi de manera excluyente. Se analiza la actividad matemática que estos profesores llevan a cabo con los problemas y en qué medida realizan acciones de modelado que les permitan profundizar el estudio.

2. MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LA TAD

La TAD, considera que toda actividad matemática puede ser interpretada como una actividad de modelización (Chevallard, et al., 1997). Hacer matemáticas consiste esencialmente en la actividad de producir, transformar, interpretar y hacer evolucionar modelos matemáticos para poder aportar respuestas a ciertas cuestiones problemáticas.

En sus primeros trabajos, Chevallard (1989) define la modelización matemática a partir de un esquema simple que involucra a un sistema (matemático o no) y a un modelo matemático de ese sistema. Dicho esquema consta de tres estadios en los cuales (a) se define el sistema a modelar y se identifican variables que se consideran pertinentes; (b) se establecen relaciones entre esas variables y se elabora un modelo; (c) se trabaja matemáticamente con el modelo para aumentar el conocimiento sobre sistema estudiado y se plantean nuevas preguntas que incluso pueden llevan a un nuevo proceso de modelización (Figura 1).

Figura 1: fases de la modelización matemática
Fuente: Elaboración propia

La ausencia de actividades matemáticas de modelado, que involucran la interpretación y evaluación de un modelo y el análisis del conocimiento que produce o no, son un obstáculo para el desarrollo de una enseñanza conforme a la TAD (Otero, 2021). Por este motivo, se pretende incorporar la modelización como motor de cambios, aun con dispositivos mucho más elementales que los REI, como lo son los problemas que aparecen en los libros de texto escolares.

3. METODOLOGÍA

La investigación se realizó en un curso de Didáctica de las Matemáticas, que pertenece a la carrera Licenciatura en Educación Matemática (LEM) de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina. Se trata de una carrera de grado, dictada completamente en línea y orientada principalmente a profesores de matemática que carecen de formación universitaria. Durante el curso se estudia la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999, 2013).

En este curso participaron en total 35 profesores de matemática en servicio, en adelante llamados sólo profesores. Ellos residen y trabajan en diversas regiones y provincias del país y en su mayoría enseñan en el nivel secundario. Su experiencia profesional oscila entre 2 a 15 años. El curso se realizó utilizando la plataforma virtual Moodle, con un docente-investigador por cada doce estudiantes.

Recepción: 06/04/2022 Aceptación: 06/07/2022

Se seleccionaron tres problemas escolares de matemática y a cada uno de los profesores participantes del curso se le asignó uno de manera aleatoria. Considerando ese problema, resolvieron las siguientes tareas:

Tarea 1: Resolver el problema.
Tarea 2: Reformular la respuesta a la tarea 1 y
- **(a)** Presentar una formulación matemática general del problema.
- **(b)** Describir las potencialidades del problema.

El objetivo de la tarea 1 es conocer cómo los profesores resuelven individualmente el problema, sin interactuar con los profesores del curso ni con sus pares. Las respuestas a esta tarea son revisadas por los docentes a cargo del curso y devueltas con observaciones y comentarios orientativos referidos a la matemática involucrada, intentando expandir las posibilidades de solución, dado que los profesores sólo conciben formas de resolver institucionalizadas por la escuela (Gazzola, Otero, 2022). Se pretende que esto permita profundizar el estudio.

Con la tarea 2 se espera que los profesores reformulen su entrega a la tarea 1, considerando los comentarios recibidos, ampliando las soluciones posibles y (a) realicen una formulación general del problema, entendiendo esto como una formalización, la elaboración de un modelo matemático en el sentido propuesto por Chevallard (1989). Se asume que la generación y el tratamiento del modelo podría ser útil para analizar más profundamente los conocimientos matemáticos subyacentes y ampliar las posibilidades de enseñanza con estos problemas escolares. Además, (b) se espera que los profesores mencionen las potencialidades del problema considerando los conocimientos matemáticos involucrados e incluso otros, que podrían surgir del modelo.

3.1. Los problemas escolares propuestos a los profesores

Los tres problemas escolares propuestos (Cuadro 1) pertenecen al bloque curricular de Álgebra y Funciones, que los profesores enseñan habitualmente. No se trata de problemas legítimos para los profesores, para ellos son más bien ejercicios, que requieren de procedimientos o técnicas rutinarios y mecánicos, pero sí son tratados como problemas en la enseñanza.

Cuadro 1: problemas escolares propuestos durante el curso

Problema A	*Como faltaban cuatro sándwiches, los cortamos en tres partes. Comimos dos partes cada uno y sobraron cuatro. ¿Cuántos éramos y cuántos sándwiches había?*
Problema B	*Un hombre distribuyó una suma de dinero entre sus hijos de la siguiente manera: al mayor le dio 1000 pesos más 1/10 de lo que le restaba, luego le dio 2000 al segundo más 1/10 del restante, al tercero le dio 3000 más 1/10 de y así siguiendo hasta llegar al último hijo. Hecho esto cada hijo recibió la misma cantidad de dinero. ¿Cuántos hijos tiene el hombre y cuánto dinero repartió?*
Problema C	*Te proponen que si colaboras con ciertas tareas del hogar, podrían pagarte cada día, durante 30 días. Las formas de pagarte propuestas son:* *Forma 1: 1 centavos el primer día, 2 centavos el segundo día, 4 centavos el tercer día, 8 centavos el cuarto día y así sucesivamente.* *Forma 2: 100 pesos el primer día, 200 pesos el segundo día, 300 pesos el tercer día, 400 pesos el cuarto y así sucesivamente.* *¿Cuál es la forma más conveniente?*

Los problemas están ligados al tratamiento tradicional de ecuaciones lineales con una incógnita y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas o funciones exponenciales y progresiones/series geométricas/aritméticas.

Se presenta a continuación un posible desarrollo de los problemas considerando la noción de modelización de Chevallard (1989).

En el **Problema A** (Otero, 2021), las variables del sistema son: $p, s, k, n, b, r \in \mathbb{N}$ con $p > s$ y donde
p: número de personas; s: número de sándwiches; k: diferencia entre personas y sándwiches; n: unidades de partición; b: partes consumidas por cada persona; r: partes sobrantes.

Siguiendo el problema, si $k = r$, el modelo es:

$$p - s = k \qquad (1)$$
$$n \cdot s - b \cdot p = k \qquad (2)$$

y de aquí se obtienen las soluciones:

$$s = \frac{(b+1)}{n-b}k \qquad (3)$$
$$p = \frac{(n+1)}{n-b}k \qquad (4)$$

siendo en ambos casos $n > b$.

Si igualamos (1) y (2): $p - s = ns - bp$, es posible establecer relaciones entre p y s:

$$\frac{p}{s} = \frac{(1+n)}{(1+b)}$$
$$p = \frac{(1+n)}{(1+b)} \cdot s$$

y como $p > s$, entonces

$$\frac{(1+n)}{(1+b)} > 1$$

Para el caso particular del problema considerado:
$n = 3, b = 2, k = 4$, se obtiene que $s = 12$ y $p = 16$.

De manera sencilla, el modelo permite analizar para cuáles valores de n, b existe solución. Por ejemplo, con (4) se obtiene k en función de s:

$$k = \left(\frac{n-b}{b+1}\right)s \qquad n > b$$

Entonces, como $s \in \mathbb{N}$, $k \in N$ siempre que $\left(\frac{n-b}{b+1}\right) \in N$

Es decir que para cualquier k partiendo de $s = 1$ existirá una solución natural.

En cambio, si $\left(\frac{n-b}{b+1}\right)$ es un número fraccionario, los valores de k serán naturales, sólo si s es múltiplo de $b + 1$. Es decir que no cualquier k será posible para n y b dados.

En cualquiera de los casos considerados, los valores de k admisibles son los términos de una sucesión aritmética de razón k, cuyo primer término es k.

Recepción: 06/04/2022 Aceptación: 06/07/2022

Si consideramos el caso $k \neq r$ el modelo del sistema es:

$$p - s = k \qquad (5)$$
$$n.s - b.p = r \qquad (6)$$

Las soluciones aquí son

$$s = \left(\frac{r+bk}{n-b}\right) \qquad (7)$$
$$p = \left(\frac{r+nk}{n-b}\right) \qquad (8)$$
con $n > b$

De aquí,
$$\frac{p}{s} = \left(\frac{r+nk}{r+bk}\right) \Rightarrow\ p = \left(\frac{r+nk}{r+bk}\right)s \qquad (9)$$

como $p > s$, entonces
$$\frac{(r+nk)}{(r+bk)} > 1$$

Por otro lado, despejando p de (5) y (6) e igualando, si se considera a n , b, r como parámetros se puede expresar k en función de s:
$$k = \frac{s(n-b)-r}{b} \qquad (10)$$

Los valores de k naturales se obtienen cuando el numerador es múltiplo de b y $s(n-b) > r$. Es decir que no cualquier k será posible para n, b, r dados.

En el **Problema B** (Otero y Banks, 2006), las variables del sistema: $n, k \in \mathbb{N}$ con $n, k > 1$, $x, a \in \mathbb{R}^+$, donde:
n: partes en las que se reparte el dinero; k: número de hijos; a: cantidad de dinero que recibe cada hijo k; x: herencia a repartir.

Entonces, si $k = 1$ se tiene que $H_1 = a + \frac{1}{n}(x - a)$ (11)

Si $k = 2$, $H_1 = 2a + \frac{1}{n}(x - 2a - H_1)$ (12)

Para $k - 1$
$$H_{k-1} = (k-1)a + \frac{1}{n}(x - (k-1)a - (k-2)H_1) \qquad (13)$$
Entonces,
$$H_k = ka + \frac{1}{n}[x - ka - (k-1)H_1] \qquad (14)$$

Como $H_1 = H_2 = \cdots = H_{k-1} = H_k$, entonces, $x = kH$ (15)

Igualando (13) y (14) se tiene que
$$H_1 = a(n-1) \quad (16)$$

y como $n \in \mathbb{N}$, lo que recibe cada hijo es múltiplo de a y
$$x = kH_k = ka(n-1)$$

por (15) $H_1 = H_k$, entonces
$$x = a(n-1)^2 \quad (17)$$

A partir de (16) y (17), $k = n - 1$ es decir que el número de hijos queda determinado por las partes que se tomen al repartir según las condiciones asumidas.

Particularmente, en el problema considerado, $n = 10$, $a = 1000$, y se obtiene entonces que $k = 9$ y $x = 81000$.

En el **Problema C**, se proponen dos formas de ganar dinero. Para la forma 1 las variables son $a, k, d \in \mathbb{R}^+, t \in \mathbb{N}$ con $k > 0, a > 1, t \geq 1$ y donde:
k: cantidad de dinero que se recibe el primer día; a: cantidad de dinero que se incrementa cada día; t: número de día, d: dinero obtenido

Se tiene entonces el siguiente modelo:
$$d = k \cdot a^{t-1} \qquad (18)$$

Para la forma 2, las variables del sistema son $b, c, d \in \mathbb{R}^+, t \in \mathbb{N}$, $b, c > 0$, $t \geq 1$ y donde
b: cantidad de dinero que recibe el primer día; c: cantidad de dinero que se incrementa cada día; t: número de día, d: dinero obtenido.

El modelo de este sistema es:
$$d = b + c(t-1) \qquad (19)$$

Si se considera la secuencia ordenada determinada por el dinero que se obtiene cada día en ambas formas, es posible tratar a (18) y (19) como progresiones y analizar el dinero acumulado al cabo de n días.

Tomemos $n \in \mathbb{N}$ y
para la forma 1 de pago: $e_n(n) = k \cdot a^{n-1}$
para la forma 2 pago: $l_n(n) = b + c(n-1)$

Si llamamos $S_{1\,n}$ al resultado de sumar los n primeros términos de la sucesión geométrica e_n, se tiene

$$S_{1\,n} = \sum_{j=1}^{n} e_j = k + ka + ka^2 + \cdots + ka^{n-1} \qquad (20)$$

y también

$$a\,S_{1\,n} = a\sum_{j=1}^{n} e_j = ka + ka^2 + ka^3 + \cdots + ka^n \qquad (21)$$

Si se realiza la resta (20)-(21):

$$S_{1\,n} - a\,S_{1\,n} = \sum_{j=1}^{n} e_j - a\sum_{j=1}^{n} e_j = k - ka^n$$

de aquí
$$(1-a)S_{1\,n} = k - ka^n$$

y finalmente:
$$S_{1\,n} = \frac{k - ka^n}{(1-a)} \qquad (22)$$
con $a > 0\ y\ a \neq 1$.

Si llamamos $S_{2\,n}$ al resultado de sumar los n primeros términos de la sucesión aritmética $l_n$se tiene

$$S_{2\,n} = \sum_{j=1}^{n} l_j = l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_n \qquad (23)$$

que puede expresarse también como

$$S_{2\,n} = \sum_{j=1}^{n} l_j = l_n + l_{n-1} + l_{n-2} + \cdots + l_1 \qquad (24)$$

Sumando (22) y (23) y agrupando convenientemente se obtiene

$$2\,S_{2\,n} = \sum_{j=1}^{n} l_j = (l_1 + l_n) + (l_2 + l_{n-1}) + \cdots + (l_n + l_1)$$

Es sencillo mostrar como la suma de cada término es igual a $l_1 + l_n$. Por ejemplo:

$$l_2 + l_{n-1} = b + c + (b + c(n-2)) = b + (b + c(n-1)) = l_1 + l_n$$

y así con los siguientes términos, por lo tanto,

$$2\, S_{2\, n} = \sum_{j=1}^{n} l_j = n(l_1 + l_n)$$

y finalmente

$$S_{2\, n} = \frac{n(l_1+l_n)}{2} \qquad (25)$$

Particularmente, en el problema considerado y utilizando (22) y (25):

Para la forma 1 se tiene $k = 1$, $a = 2$, $n = 30$ y se obtiene $S_{1\,30} = 10737418{,}23$ pesos.

Para la forma 2 se tiene $b = 100$, $c = 100$, $n = 30$, entonces $l_1 = 100$, $l_{30} = 2900$, y se obtiene $S_{1\,30} = 46500$ pesos.

Nos detenemos ahora en la forma 1 de pago, y el modelo (18) que representa un sistema de crecimiento exponencial. Es posible considerar la relación de dependencia de d con t, entonces, siendo a, k parámetros:

$$d(t) = k \cdot a^{t-1} \qquad (26)$$

Si se considera el factor de incremento entre un día t y otro día $t + h$, con $h \in \mathbb{N}$:

$$\frac{d(t+h)}{d(t)} = \frac{k \cdot a^{t-1+h}}{k.\, a^{t-1}} = \frac{k \cdot a^{t-1} \cdot a^h}{k \cdot a^{t-1}} = a^h$$

Entonces se obtiene que cuando t aumenta h unidades, la función aumenta (o disminuye) respecto del estado anterior en forma exponencial. El factor de incremento depende exponencialmente de h.

Si $h = 1$ los valores de $d(t)$ y $d(t+h)$ son consecutivos y el factor de incremento:

$$\frac{d(t+1)}{d(t)} = \frac{k \cdot a^{t-1+1}}{k.\, a^{t-1}} = \frac{k \cdot a^{t-1} \cdot a^1}{k \cdot a^{t-1}} = a$$

Si se considera ahora el factor de incremento relativo:

$$\frac{d(t+h) - d(t)}{d(t)} = \frac{k \cdot a^{t-1+h} - k \cdot a^{t-1}}{k.\, a^{d-1}} = \frac{k \cdot a^{t-1} \cdot (a^h - 1)}{k \cdot a^{t-1}} = a^h - 1$$

Es posible considerar el cociente incremental:

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d(t+h) - d(t)}{h} = \frac{k \cdot a^{t-1+h} - k \cdot a^{t-1}}{h} = \frac{k \cdot a^{t-1} \cdot (a^h - 1)}{h} = d(t) \cdot \frac{a^h - 1}{h}$$

Considerando $h \in \mathbb{R}$ y la relación funcional:

$$\beta(h) = \frac{a^h - 1}{h}$$

con $h \neq 0$,

Si $h \to \infty, h, \beta(h) \to \infty$
Si $h \to 0\ h, \beta(h) \to lna$

Se obtiene entonces que si $f(t) = k \cdot a^{t-1}$:

$$f'(t) = f(t) \cdot \ln a$$

4. RESULTADOS

4.1. La solución de los profesores a los problemas

En la tarea 1 se solicitó resolver el problema. Los profesores que tenían asignado el problema A, lo resolvieron como un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Los que tenían que resolver el Problema B, lo hicieron a partir de ecuaciones lineales con una incógnita, es decir que implícitamente redujeron el problema a una variable. En el caso del Problema C, algunos profesores lo resolvieron por medio de la noción de progresión geométrica/aritmética y otros, formulando expresiones algebraicas. De la misma manera que sucedió en el estudio exploratorio, los profesores desde un primer momento relacionan el problema con un tema específico del programa, y conforme a esto, proponen una solución escolar (Gazzola, Otero, 2022).

El problema A fue asignado a once profesores. En su primera entrega (tarea 1), todos ellos plantearon un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y lo resolvieron por alguno de los métodos tradicionales (Figura 2). Como se trata de un enunciado que no permite una "traducción directa", el sistema se representó de diversas maneras:

$$\begin{cases} s + 4 = p \\ \frac{3s-4}{2} = p \end{cases}; \quad \begin{cases} p - 4 = s \\ \frac{2p+4}{2} = s \end{cases}; \quad \begin{cases} s - p = 4 \\ 3s - 2p = 4 \end{cases}$$

Luego, mayoritariamente se utilizó el método de igualación y en menor medida el método de sustitución.

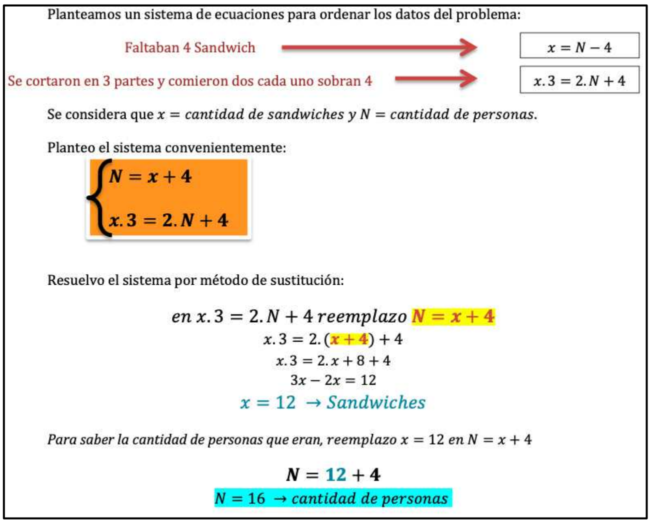

Figura 2: fragmento de una solución propuesta para el problema A
Fuente: datos de la investigación

En la reformulación de la primera entrega sólo tres profesores propusieron otras formas de resolución posibles, basadas en cálculos aritméticos y utilizando el algoritmo de la división, como se ejemplifica en la Figura 3.

Como faltaban 4 sándwiches para llegar al entero S (cantidad de sándwiches) y ellos deciden dividir por 3 los sándwiches que tienen para hacer el reparto equitativo y sabiendo que le sobraban cuatro. Podemos analizar los restos de la división
Si dividimos la cantidad de sándwiches por 3 y queremos obtener de resto cuatro, entonces,

S:3=4
S=4.3
S=12

Y la cantidad de personas (P) – cantidad de sándwiches (S) = 4 sándwiches que sobran

P-S=4
P=4+12
P=16

Si dividimos 16 entre 12, nos da de resto 4

Por lo tanto, eran 16 personas.

Figura 3: fragmento de una solución propuesta para el problema A
Fuente: datos de la investigación

El problema B fue resuelto por doce profesores. En todos los casos, las soluciones propuestas consisten en obtener las ecuaciones siguiendo el texto literal del enunciado para el primer y segundo hijo, conforme a (11) y (12), y con los parámetros inicializados según se propone en el problema. Estas ecuaciones se igualan y se resuelve para obtener el monto total de la herencia y a partir de este valor, la cantidad de hijos (Figura 4).

H_1=1.000 + $\frac{1}{10}$(x-1000)
H_2= 2.000+$\frac{1}{10}$(x-2.000-H_1)
H_3= 3.000+ $\frac{1}{10}$ (x-3000-H_1)

Igualo
$H_1 = H_2$

1.000+$\frac{1}{10}$ (x-1.000)= 2.000+$\frac{1}{10}$ (x-2.000-(1.000+$\frac{1}{10}$ (x-1.000)
1.000+$\frac{1}{10}$ x-100= 2.000+$\frac{1}{10}$(x-200-100-$\frac{1}{10}$x+100)
1.000-100= 2.000-200-100-$\frac{1}{10}$ x+10
1.000-100-2.000+200+100-10= -$\frac{1}{10}$ x
1.300-2.110=-$\frac{1}{10}$ x
-810= -$\frac{1}{10}$ x
-810: $-\frac{1}{10}$= x
81.000=x

H_1= 1.000+$\frac{1}{10}$ (81.000-1.000)
H_1= 1.000+ 8.000
H_1= 9.000$

81.000:9.000= 9 hijos

Repuesta: El padre repartió $81.000 entre sus 9 hijos.

Figura 4: fragmento de una solución propuesta para el problema B
Fuente: datos de la investigación

En la reformulación sólo dos profesores propusieron formas alternativas de llegar a la solución. Éstas se basan en cálculos numéricos (resolución aritmética) y en una resolución algebraica basada en los restos (Figura 5).

Otra resolución:
Como: H_1 = 1000 + 1/10 (x – 1000) **(1)**; R_1= x – 1000 **(2)**; R_2 = x – 2000 – H_1 **(3)**
A partir de H_1 = 1000 +1/10 R_1 y H_2 = 2000 + 1/10 R_2
R_1 - R_2 = 20000 – 10000 => R_1 – R_2 = 10000 **(4)**
De (1), (2) y (3) en (4) queda:
X – 1000 – (x – 2000 – H_1) = 10000
X – 1000 – x +2000 + H_1 = 10000
H_1 = 9000

Figura 5: fragmento de una solución propuesta para el problema B
Fuente: datos de la investigación

Siguiendo con la resolución de la figura anterior, si se reemplaza H_1 en (1) de la figura 5, se obtiene que $x = 81000$ y a partir de (2) y (3), los restos son $R_1 = 80000$, $R_2 = 70000$ y como se reparte la totalidad del dinero y se hace en partes iguales, se obtiene que son nueve hijos.

Puede observarse que considerar a la cantidad de dinero que recibe el primer hijo como incógnita permite obtener ecuaciones más sencillas que las anteriores y las operaciones que deben realizarse para llegar a la solución se reducen.

El Problema C fue asignado a doce profesores. Ellos se diferencian en dos grupos según su solución. Algunos profesores (5/12) usaron progresiones geométricas y aritméticas y los restantes (7/12) determinaron las fórmulas que expresaba el dinero ganado cada día para ambas formas de pago y las compararon.

Los profesores que utilizaron progresiones formularon primero el término enésimo para ambas formas de pago. La primera corresponde a progresiones geométricas, cuya forma general del término enésimo es $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$. En el caso de este enunciado:

$$a_n = 0{,}01 \cdot 2^{n-1}$$

La segunda forma de pago corresponde a una progresión aritmética y su término enésimo se formula de manera general: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$. Se tiene entonces:

$$a_n = 100 + (n-1) \cdot 100$$
$$a_n = 100 \cdot n$$

Luego, estos profesores utilizaron las fórmulas para calcular la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica y aritmética (Figura 6), obteniendo el monto del dinero acumulado al cabo de $n = 30$ días.

Forma 1:

$$S_n = \frac{a_1 . (r^n - 1)}{r - 1}$$
$$S_{30} = \frac{0{,}01 . (2^{30} - 1)}{2 - 1} =$$
$$S_{30} = \frac{0{,}01 . (2^{30} - 1)}{2 - 1} =$$
$$S_{30} = 10737418{,}23$$

Forma 2:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) . n}{2}$$
$$S_{30} = \frac{(100 + 3000) . 30}{2}$$
$$S_{30} = \frac{(3100) . 30}{2}$$
$$S_{30} = \frac{93000}{2}$$
$$S_{30} = 46500$$

La forma más conveniente es la 1, porque en total me darían $10737418,23. En la forma 2, me pagarían $46500.

Figura 6: fragmento de una solución propuesta para el problema C
Fuente: datos de la investigación

Los restantes profesores construyeron dos fórmulas que expresan el dinero ganado según la forma de pago. A partir de ellas realizaron tablas de valores que al compararlas numéricamente, les permitieron decidir cuál es el método de pago más conveniente (Figura 7).

La fórmula obtenida para la forma 1 de pago es $f_1(t) = 0{,}01 \cdot 2^{t-1}$ y para la forma 2, $f_2(t) = 100 \cdot t$. Se puede observar en la Figura 7 que al final de la tabla se realiza la suma del dinero ganado al cabo de 30 días. Además se identifica a partir de qué día conviene la forma de pago 1 sobre la forma de pago 2, siempre numéricamente.

	FORMA 1	FORMA 2
día 1	0,01	100
día 2	0,02	200
día 3	0,04	300
día 4	0,08	400
día 5	0,16	500
día 6	0,32	600
día 7	0,64	700
día 8	1,28	800
día 9	2,56	900
día 10	5,12	1000
día 11	10,24	1100
día 12	20,48	1200
día 13	40,96	1300
día 14	81,92	1400
día 15	163,84	1500
día 16	327,68	1600
día 17	655,36	1700
día 18	1310,72	1800
día 19	2621,44	1900
día 20	5242,88	2000
día 21	10485,76	2100
día 22	20971,52	2200
día 23	41943,04	2300
día 24	83886,08	2400
día 25	167772,16	2500
día 26	335544,32	2600
día 27	671088,64	2700
día 28	1342177,28	2800
día 29	2684354,56	2900
día 30	5368709,12	3000
	10737418,23	46500

Figura 7: fragmento de una solución propuesta para el problema C
Fuente: datos de la investigación

Sólo dos de los profesores que optaron por esta solución identificaron explícitamente que se trata de distintos tipos de crecimiento, haciendo referencia a que uno es lineal y el otro exponencial. En esta primera entrega, ningún profesor mencionó explícitamente la relación funcional.

En la reformulación, cinco profesores propusieron soluciones alternativas a la que habían considerado antes. La solución en todos estos casos está vinculada a las funciones exponenciales y lineales, y mayoritariamente a su representación gráfica, a fin de comparar la variación de ambos crecimientos. En esta tarea (tarea 2) la noción de funcion aparece vinculada a la necesidad de generar un modelo para el problema, ya que tradicionalmente en la escuela suele considerarse a las funciones como modelos de situaciones de la "vida real".

4.2. El modelado de los problemas que realizan los profesores

La solicitud de realizar una formulación matemática general, tenía como objetivo que los profesores generaran un modelo matemático de la situación. Se utilizó 'formulación matemática general' porque se consideró que ellos interpretarían mejor la intencionalidad matemática de esta tarea. Las respuestas de los profesores, independientemente del problema asignado, se pueden clasificar en tres grupos:

No modela: se considera que el modelo matemático del sistema estudiado está formado por ecuaciones o fórmulas con los parámetros inicializados, según el problema originalmente propuesto.

Modela, pero no analiza el modelo: se identifican todas las variables y se obtiene el modelo matemático del sistema, pero no se trabaja matemáticamente con él. No se obtienen soluciones generales ni nuevo conocimiento. Si se resuelve, se inicializa primero, según los parámetros del problema original.

Modela el sistema y las soluciones: se identifican todas las variables y se obtiene el modelo matemático del sistema. Se trata matemáticamente con el modelo para obtener soluciones generales. Aun así, no se evidencia que se obtenga nuevo conocimiento sobre el sistema.

Mayoritariamente (26/35) las respuestas de los profesores se encuentran en la categoría **no modela**. Los profesores permanecen sujetos a los parámetros iniciales del problema. Para ejemplificar, tomemos el Problema A. Podemos observar en la respuesta que se muestra en la Figura 8 que la cantidad faltante de sándwiches, las particiones, la cantidad de partes que come cada persona, y las partes que sobran, permanecen fijas y no se habilita el análisis otras posibilidades. Además, se considera que la formulación general debe ser en función de x y de y.

Se considera que $x = cantidad\ de\ sandwiches$ y $N = cantidad\ de\ personas$.

Para generalizar esto, cambiare las variables por x e y, llamaremos

$$x = cantidad\ de\ sándwiches\ e\ y = cantidad\ de\ personas$$

Sabemos que el doble de la cantidad de personas aumentada en 4 será equivalente al triple de sándwich que se tenían originalmente, es decir: $2.y + 4 = x.3$

Por otro lado, la cantidad original de sándwich es equivalente a la cantidad de personas aumentado en 4 unidades, es decir: $x = y - 4$

El sistema anteriormente planteado quedaria de la siguiente forma:

$$\begin{cases} N = x + 4 \\ x.3 = 2.N + 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ x.3 = 2.y + 4 \end{cases}$$

Como todo sistema de ecuaciones, puede resolverse de varias formas, dos de ellas son el método de sustitución y el método de igualación.

Figura 8: generalización propuesta para el problema A
Fuente: datos de la investigación

Un grupo reducido de profesores (6/35) se ubica en la categoría **modela, pero no analiza el modelo**. Estos profesores identifican cuáles son las variables del sistema y el dominio de definición, y establecen relaciones entre ellas para generar el modelo. Sin embargo, no realizan ninguna acción con él. Los profesores que buscaron la solución, lo hicieron inicializando los parámetros según el problema. En la Figura 9 se presenta un ejemplo, considerando nuevamente el problema A.

Si llamamos P a la cantidad de personas, S a la cantidad de sándwiches y a a la cantidad de sándwiches que faltan para que cada P reciba un S, obtenemos:

$$\boldsymbol{P - S = a} \qquad (P, S \wedge a \in \mathbb{N})$$

Ahora bien, si dividimos en n partes a los S que tenemos y cada persona come m cantidad de S obtenemos k que es una tercera parte más chica que a

$$\boldsymbol{nS - mP = k} \qquad (n, S, m \wedge P \in \mathbb{N})$$

Como $\boldsymbol{a = 4, n = 3, m = 2, k = 4}$, entonces: $\boldsymbol{P = 16, S = 12}$

Figura 9: generalización propuesta para el problema A
Fuente: datos de la investigación

Sólo tres profesores propusieron respuestas que se encuentran en el grupo **modela el sistema y las soluciones**. Estos profesores identificaron las variables, generaron el modelo y lo trataron matemáticamente para obtener soluciones generales. En la figura 10 se presenta un ejemplo, continuando con el caso del problema A.

A pesar de la generalización alcanzada por estos últimos profesores, no se evidencia un tratamiento matemático más profundo que los lleve a analizar, por ejemplo, las posibilidades/condiciones de cada uno de los parámetros intervinientes ni la obtención de nuevo conocimiento.

*Como faltaban **a** sándwiches, los cortamos en **b** partes. Comimos **c** partes cada uno y sobraron **d**. ¿Cuántos éramos?*

x: Cantidad de personas

y: Cantidad de sándwiches

"Como faltaban a sándwiches" (es decir, había a personas más que la cantidad total de sándwiches):

$$x = y + a \quad ❶$$

"Los cortamos en b partes, comimos c partes cada uno y sobraron d" (es decir, la cantidad de partes, una vez cortados, es b veces la cantidad de sándwiches; y a su vez supera en d a la cantidad de partes que cada uno comió, que es c):

$$cx + d = by \quad ❷$$

Reemplazando x según la igualdad ❶ en ❷ tenemos:

$$c(y+a) + d = by$$
$$cy + c \cdot a + d = by$$
$$ca + d = by - cy$$
$$ac + d = (b-c)y$$
$$\frac{ac+d}{b-c} = y \quad ❸$$

Reemplazando ❸ en ❶ tenemos:

$$x = \frac{ac+d}{b-c} + a \Rightarrow x = \frac{ac+d+a(b-c)}{b-c}$$
$$x = \frac{ac+d+ab-ac}{b-c} \Rightarrow x = \frac{d+ab}{b-c}$$

Figura 10: generalización propuesta para el problema A
Fuente: datos de la investigación

4.3. La potencialidad matemática de los problemas para los profesores

En respuesta a la tarea 2 b, los profesores describieron las potencialidades del problema que se les había asignado. Las afirmaciones más frecuentes están vinculadas al uso del problema para estudiar un tema particular del programa enseñado. Así, el problema A 'sirve' para estudiar sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y el problema B para estudiar ecuaciones lineales con una incógnita. En cuanto al problema C mayoritariamente se reconoció que permitía estudiar funciones exponenciales (y su comparación con las funciones lineales), y sólo un profesor lo asoció con las sucesiones y las series.

Una particularidad del problema B, es que la mitad de los profesores señalaron que se trata de un problema complejo y "poco probable de encontrar en la escuela secundaria".

En relación a los problemas A y B, los profesores destacaron el potencial para realizar actividades de "traducción del lenguaje verbal al lenguaje algebraico". Para los tres problemas, diversos profesores señalaron que también su utilidad residía en "resolver (matemáticamente) situaciones de la vida cotidiana". A continuación, se ejemplifican estas afirmaciones con algunos fragmentos textuales de las respuestas de los profesores:

P04: *Permite a los alumnos empezar a trabajar desde el lenguaje coloquial y luego poder formalizarlo en el lenguaje algebraico*.

P13: *Como potencialidad entiendo que el problema permite utilizar diferentes técnicas de resolución basada en la traducción del lenguaje verbal al algebraico*.

P21: *Esta actividad sirve para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático mediante la aplicación de resolución de sistema de ecuaciones utilizando un problema de la vida cotidiana*.

5. DISCUSIÓN

Para resolver el problema que se les había asignado, los profesores lo vincularon, en principio, con un tema del programa. Esto afecta la actividad matemática que realizan con él, puesto que las soluciones propuestas se circunscriben a ese tema y a la forma usual de enseñarlo en la escuela secundaria. Así, todos los profesores con el problema A se limitaron a plantear un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y a las técnicas tradicionales de resolución, sin explorar otras cuestiones como la divisibilidad de los números naturales o el teorema del resto y sus posibilidades.

El problema B se reduce a una variable para plantear una ecuación lineal con una incógnita, apegándose a las fórmulas que se obtienen de la habitual "traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico", aunque esto no es lo que harían los estudiantes, puesto que se ha mostrado en otras investigaciones que ellos resuelven de una manera algebraica más sencilla considerando los restos y operando con ellos (Otero y Banks, 2006).

En el caso del problema C, los profesores se restringen a las fórmulas, ya sea del término enésimo de las sucesiones y la suma de los primeros *n* términos o de las representaciones algebraicas que ellos adoptan de la situación. En cualquiera de los casos, se realizan comparaciones numéricas para dar una respuesta, los profesores dejan de lado todo el estudio de la variación que el problema admite, porque no es una forma de tratar este tipo de problemas en la escuela.

La mayoría de los profesores no modelizó los problemas, sólo formuló ecuaciones o fórmulas con los parámetros fijos. Estos profesores conservan todos los valores numéricos del enunciado, no utilizan letras para representar los parámetros ni los analizan. Esta acción también está vinculada en que, en definitiva, esta forma de considerar los problemas no es propia de la enseñanza en el nivel secundario y se evidencia en el siguiente fragmento de la respuesta de un profesor a la tarea 2:

P09: *En cuanto a la generalización, debo ser sincera y reconocer que no se me ocurría como generalizarlo más allá de colocar variables x e y, que es lo que en general hacemos en la escuela.*

Los profesores que realizaron formulación matemática relativamente general del problema, no hicieron lo mismo con la solución, porque frente a la situación de dar una respuesta al problema, inicializaron los parámetros para encontrar un resultado específico. Podría decirse que estos profesores modelan parcialmente el problema, pues satisfacen las etapas 1 y 2 del proceso (Figura 1), pero no tratan matemáticamente el modelo ni analizan los conocimientos subyacentes. Existe una tendencia a proponer en la escuela problemas que tienen una solución numérica y única, que resulta correcta o incorrecta, y por lo tanto las soluciones generales no están en el radar de estos profesores.

Muy pocos profesores propusieron una modelización relativamente próxima a la propuesta por Chevallard (1989), aunque el tratamiento del modelo no fue más allá que la formulación de soluciones generales. El tratamiento del modelo y la posibilidad de llevarlo a cabo en la escuela, requiere de trasformaciones en el problema que resultan ajenas a los profesores. Por ejemplo, tratar el problema C en el sentido propuesto más arriba en este trabajo, requiere despejarse del dominio discreto que en principio tiene el sistema y realizar adaptaciones que permitan considerar un dominio continuo.

En cuanto a las potencialidades de los problemas, los profesores no consideraron el conocimiento matemático en sí ni sus posibilidades, sólo mencionaron "el" tema del programa con el cual, ellos lo relacionan, y que en su mayoría coincide con el conocimiento matemático que utilizaron para resolver la tarea 1. Esto no es propio de los profesores que utilizaron sucesiones y series en su primera solución, ya que al momento de mencionar las potencialidades matemáticas las vincularon con las funciones exponenciales, que son más próximas al programa enseñado.

Más allá de la mención realizada, los profesores asocian los problemas con la acción de "traducir del lenguaje coloquial" a la notación matemática con letras y números. Se observa la importancia otorgada a "el pasaje" de los enunciados escritos en lenguaje natural, a símbolos algebraicos (a los que suelen llamar, erróneamente, lenguaje simbólico o algebraico). Esto también se identificó en el estudio previo (Gazzola y Otero, 2022) y es propio de considerar que la enseñanza del álgebra escolar (Bolea et al., 2001) tiene como razón de ser el reemplazo de enunciados verbales por fórmulas.

Las respuestas a las tareas que se presentaron en este trabajo son las iniciales, es decir, reflejan lo que los profesores conciben desde el comienzo. Es destacable que en ambas tareas los profesores asumieron su posición de docentes en la escuela secundaria y trataron el problema como lo hacen habitualmente. Esto no significa que ellos no tienen el equipamiento praxeológico suficiente para estudiar en profundidad el problema, generar un modelo matemático y producir nuevo conocimiento a partir de él, sino que sus actividades habituales los llevan a fijar los parámetros, a reducir las variables y a buscar una solución única e identificable, obstaculizando así cualquier actividad de modelización genuina.

6. CONCLUSIÓN

En este trabajo analizamos cómo 35 profesores de matemática en servicio resuelven ciertos problemas escolares desde la perspectiva de la modelización. Desde el principio, los profesores se ubican en su posición de docentes de la escuela secundaria e intentan soluciones escolares, reduciendo fuertemente el entorno praxeológico. En esta posición, se circunscriben al programa enseñado, en el cual las actividades de modelización son alien, entonces estos profesores no realizaron una formulación general y se ataron al problema original conservando todos los valores numéricos del enunciado. Los resultados evidencian las dificultades de para realizar acciones ajenas a las prácticas escolares habituales, aun cuando se tiene la iniciativa de realizar cambios en la manera de enseñar.

7. REFERENCIAS

Barquero, B.; Bosch, M. & Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(3), 339-352.

Bolea, P. (2002), *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.* Tesis doctoral, Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza.

Bolea, P., Bosch, M., y Gascón, J. (2001) La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: El caso de la proporcionalidad. *Recherches en didactique des mathématiques*, *21*(3), 247-304.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x, 19,* 45- 75.

Chevallard, Y. (1999) "El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico". *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2009). Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr/.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. Journal of Research in Mathematics Education, 2(2), 161-182. doi: 10.4471 /redimat.2013.26.

Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 20(1),* 159-169.

Gazzola, M. P. y Otero, M. R. (2022). Instrumentalización de problemas escolares de los profesores de matemática en servicio. *PNA*, 16(4), 281-307.

Otero, M. R. (2021). La Formación de Profesores. Recursos para la enseñanza por indagación y el cuestionamiento. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Tandil, Argentina.

Otero, M. R. y Banks Leite, L. (2006). Modelos mentales y modelos numéricos: un estudio descriptivo en la enseñanza media. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 151-178.

Otero, M. R.; Gazzola, M. P.; Llanos, V. C. (2021) Enseñar a partir de preguntas: la influencia de la posición institucional. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (REIEC)*, 16(2), pp. 30-3

María Paz Gazzola

Profesora Adjunta de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN) y Becaria Posdoctoral del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas (CONICET) en el área de Psicología y Ciencias de la educación. Realizó un doctorado en Enseñanza de las Ciencias mención matemática en la UNICEN (2018), bajo la dirección de la Dra. María Rita Otero y la Dra. Viviana Carolina Llanos. Es Profesora en Matemáticas (2011) y Licenciada en educación matemática (2012) por la UNICEN. Investiga en educación matemática en el laboratorio NIECyT-CONICET.