REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

# El Esquema del Cálculo Diferencial e Integral para ser enseñado en simultáneo

**Patricia Rojas Salinas[1], María Trigueros Gaisman[2]**

**paesrojas@gmail.com , mtriguerosg@gmail.com**

*[1]Universidad del Bío- Bío, Chile*
*[2]Instituto Tecnológico Autónomo de México*

**Resumen**

Se presenta una solución al problema del aprendizaje y la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral en el nivel universitario introduciendo, desde el inicio, un énfasis en la relación entre los conceptos primordiales de esta disciplina; la derivada y la integral. Se parte desde una mirada cognitiva que permite generar una Descomposición Genética (DG) en pos de la construcción de un Esquema que describa relaciones entre conceptos, para usarla como modelo para la construcción del Cálculo Diferencial e Integral (CDI) desde una perspectiva que pretende trabajar a estos dos objetos matemáticos en simultáneo. Desde la teoría APOE (acrónimo de: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), apreciamos el cómo los estudiantes muestran evidencia de las estructuras de la teoría conforme aprenden, y con ello de los mecanismos de abstracción reflexiva, lo que devela la construcción del propio esquema. Se evalúa la propuesta didáctica, mediante un estudio exploratorio, en un curso constituido por 17 estudiantes, durante un semestre. Al finalizar el curso se aplicó una entrevista entregando la caracterización de cada estudiante, el tipo de relación que exhibe a través del análisis basado en cada uno de los niveles del Esquema y señalando si los estudiantes se encuentran en un nivel Intra- CDI, Inter-CDI o Trans-CDI según corresponda.

**Palabras clave:** Esquema; Cálculo; Derivada; Integral; Teoría APOE.

## O Esquema de Cálculo Diferencial e Integral a ser ensinado simultaneamente

**Resumo**

É apresentada uma solução para o problema da aprendizagem e ensino do Cálculo Diferencial e Integral a nível universitário, introduzindo, desde o início, uma ênfase na relação entre os conceitos fundamentais desta disciplina; a derivada e a integral. Parte-se de um olhar cognitivo que permite gerar uma Decomposição Genética (DG) em busca da construção de um Esquema que descreva as relações entre conceitos, a ser utilizado como modelo para a construção do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) numa perspectiva que se pretende trabalhar esses dois objetos matemáticos simultaneamente. A partir da teoria APOE (sigla para: Actions, Processes, Objects and Schemes), apreciamos como os alunos mostram evidências das estruturas da teoria à medida que aprendem e, com isso, dos mecanismos de abstração reflexiva, que revelam a construção dos seus próprios. esquema. A proposta didática é avaliada, por meio de um estudo exploratório, em uma disciplina composta por 17 alunos, ao longo de um semestre. Ao final da unidade curricular, foi aplicada uma entrevista proporcionando a caracterização de cada aluno, o tipo de relação apresentada através da análise baseada em cada um dos níveis do Regime e indicando se os alunos se encontram num Intra-CDI, Inter- CDI ou Trans-CDI conforme apropriado.

**Palavras-chave:** Esquema; Cálculo; Derivada; Integral; Teoria APOE.

## The Differential and Integral Calculus Scheme to be taught simultaneously

**Abstract**

A solution to the problem of learning and teaching of Differential and Integral Calculus at the university level is presented, introducing, from the beginning, an emphasis on the relationship between


*Recepción:10/06/2020* *Aceptación: 05/11/2020*

the fundamental concepts of this discipline; the derivative and the integral. It starts from a cognitive look that allows generating a Genetic Decomposition (DG) in pursuit of the construction of a Scheme that describes relationships between concepts, to be used as a model for the construction of Differential and Integral Calculus (CDI) from a perspective that intends to work these two mathematical objects simultaneously. From the APOE theory (acronym for: Actions, Processes, Objects and Schemes), we appreciate how students show evidence of the theory's structures as they learn, and with it of the reflexive abstraction mechanisms, which reveals the construction of their own scheme. The didactic proposal is evaluated, through an exploratory study, in a course consisting of 17 students, during a semester. At the end of the course, an interview was applied providing the characterization of each student, the type of relationship exhibited through the analysis based on each of the levels of the Scheme and indicating if the students are at an Intra-CDI, Inter- CDI or Trans-CDI as appropriate.

**Keywords:** Scheme; Calculus; Derivative; Integral; APOE Theory.

## Le schéma de calcul différentiel et intégral à enseigner simultanément

**Résumé**

Une solution au problème de l'apprentissage et de l'enseignement du calcul différentiel et intégral au niveau universitaire est présentée, introduisant, dès le début, un accent sur la relation entre les concepts fondamentaux de cette discipline; la dérivée et l'intégrale. Il part d'un regard cognitif qui permet de générer une décomposition génétique (DG) dans la poursuite de la construction d'un schéma qui décrit les relations entre les concepts, à utiliser comme modèle pour la construction du calcul différentiel et intégral (CDI) dans une perspective qui a l'intention de travailler ces deux objets mathématiques simultanément. A partir de la théorie APOE (acronyme pour: Actions, Processus, Objects and Schemes), nous apprécions la façon dont les étudiants montrent des preuves des structures de la théorie à mesure qu'ils apprennent, et avec elle des mécanismes d'abstraction réflexive, qui révèle la construction de leurs propres schème. La proposition didactique est évaluée, à travers une étude exploratoire, dans un cours composé de 17 étudiants, au cours d'un semestre. À la fin du cours, un entretien a été appliqué fournissant la caractérisation de chaque étudiant, le type de relation exposé à travers l'analyse basée sur chacun des niveaux du Schéma et indiquant si les étudiants sont à un Intra-CDI, Inter- CDI ou Trans-CDI selon le cas.

**Mots clés: Schéma; Calcul; Dérivée; Intégrale; Théorie APOE.**

## 1. INTRODUCCIÓN

Se comparte con un gran número de investigadores en Educación Matemática la preocupación por las dificultades en el aprendizaje del cálculo diferencial e integral, tanto en cursos introductorios como avanzados (entre ellos, Asiala et al., 1997; Carabus, 2002; Baker et al., 2000; Trigueros, 2005; Cooley et al., 2007; Clark et al., 1997; Thompson y Silverman, 2008; Czarnocha et al., 2001). Desde la década de año 1980 se han documentado estudios que muestran las causas de estas dificultades, así como sugerido propuestas para superarlas (Cornu, 1981; Robert, 1982; Orton, 1983; Dubinsky y Lewin, 1986; Sfard, 1988). La literatura más reciente muestra, por una parte, la dificultad de los estudiantes para comprender los conceptos abstractos del cálculo diferencial e integral y, por otra, para aplicarlos en la solución de distintos problemas cotidianos y de aplicación científica o técnica en los que sería adecuado su uso (por ejemplo, Tatar & Zengin, 2016; Bresoud, 2017; Wagner, 2018; Pino-Fan, et al., 2018; Fuentealba, et al., 2019).

La revisión de estos estudios condujo a la decisión de abordar una investigación en la que se intenta enfocar el problema del aprendizaje y la enseñanza del cálculo diferencial e integral desde una perspectiva que pretende experimentar y analizar los resultados de una aproximación en la que se busca introducir esta disciplina en el nivel universitario incluyendo, desde el inicio, un énfasis en la relación entre los conceptos primordiales; la derivada y la integral. Para lograr este objetivo fue necesario comenzar desde el desarrollo de una DG que permitiera el diseño de la propuesta didáctica y de actividades para que los estudiantes trabajaran durante todo un curso, además de diseñar y analizar los instrumentos a emplear en el análisis de los resultados obtenidos. Todo este trabajo se basó en la Teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) de la educación matemática que cuenta con las estructuras teóricas y una metodología asociada a ellas para llevar a cabo el trabajo completo de diseño e investigación (Arnon, et al., 2014).

## 2. ESTADO DEL ARTE

Asiala et al., (1997) reportan dificultades al interpretar la derivada y en sus conclusiones enfatizan la importancia de la representación gráfica del concepto; Carabus (2000), por su parte, estudió los niveles de comprensión, encontrando dificultades en el pensamiento variacional con tendencia hacia el pensamiento numérico y algebraico.

Baker et al., (2000), llevaron a cabo un estudio usando la noción de Esquema de la Teoría APOE para interpretar la forma en la que los estudiantes universitarios usan de manera conjunta la primera y segunda derivada, conjuntamente con las propiedades de una función para describir el comportamiento gráfico de la misma. Sus resultados muestran dificultades de los estudiantes para coordinar la información dada analíticamente con la construcción de la gráfica de la función. Como conclusión, se propone la necesidad de detallar en la enseñanza de las relaciones entre los conceptos en las distintas regiones del dominio de la función y en la necesidad de que los estudiantes aprendan a utilizar distintas representaciones de un mismo concepto, en particular la gráfica y la analítica. En un estudio a nivel superior (Trigueros, 2005), se repite esta experiencia y se encuentran nuevamente dificultades de los estudiantes al interpretar la segunda derivada de la función y su relación con las propiedades del comportamiento gráfico de la misma; además de la falta de construcción de la relación entre la diferenciabilidad de una función y su continuidad. En este estudio se propone poner mayor énfasis en las implicaciones geométricas de la función derivada y se destaca la importancia de generar investigación sobre cómo los estudiantes aprenden los conceptos más complejos y cómo se construyen las relaciones entre ellos. Cooley y colaboradores (2007) repitieron la experiencia con estudiantes de calificaciones muy altas en un curso de cálculo diferencial e integral y una estudiante que había terminado un curso de análisis matemático incluyendo la secuencia del cálculo para investigar acerca de la posibilidad de tematización del Esquema propuesto en el primer estudio. Sus resultados mostraron las mismas dificultades encontradas en el estudio anterior, aunque en proporciones menores. Encontraron además que únicamente la estudiante que había cursado análisis mostró evidencia de haber tematizado el Esquema propuesto para la derivada y de haber construido relaciones claras entre los conceptos componentes de dicho Esquema.

Por su parte, Sánchez-Matamoros y colaboradores (2008) repitieron la experiencia de Baker y sus colaboradoras poniendo atención en las relaciones lógicas entre los distintos conceptos. Sus resultados coinciden con lo planteado en el trabajo inicial y concluyen que el desarrollo del Esquema de derivada y el conocimiento del concepto se desarrolla a través del establecimiento de relaciones con otros conceptos como lo son el de límites o el de función a través, por una parte, del uso de diferentes modos de representación de la función y, por otra, del conocimiento de sus propiedades. Estos resultados se confirmaron también en otro estudio sobre el aprendizaje de la derivada llevado a cabo por Badillo, y colaboradores (2011) quienes usaron la teoría ontosemiótica y encontraron que las dificultades para comprender los objetos matemáticos relacionados con la derivada en un punto y con la derivada como una función se deben primordialmente a la falta de coordinación de los esquemas algebraico y gráfico.

En un estudio más reciente sobre el Esquema de derivada Fuentealba y sus colaboradores (2017), encuentran resultados semejantes a los anteriores, pero, al profundizar sobre la posible tematización del Esquema de derivada encuentran una gran dificultad y sugieren que ello se debe a que en dicha construcción entran en juego varios detalles de la relación entre continuidad, primera y segunda derivada que los estudiantes pasan por alto, probablemente porque tampoco se trabajan en la clase y que debido a ello, muy pocos estudiantes logran tematizar el Esquema de dicho concepto. Es interesante añadir que años antes, los resultados obtenidos en los primeros estudios fueron comprobados mediante un estudio estadístico con un número grande de alumnos (Trigueros & Escandon, 2008).

Thompson y Silverman, en el año 2008 indican que, es imposible que los estudiantes comprendan el concepto de integral cuando se les enseña únicamente a calcular integrales, como ya lo había planteado doce años antes Tall (1990) debido a la complejidad de los conceptos involucrados en su definición. Czarnocha y sus colaboradores estudiaron la comprensión de los estudiantes del concepto de integral (2001) y encontraron que la mayoría de los estudiantes habían construido una relación débil entre la integral definida y el área bajo la curva, aunque no necesariamente con la noción de suma de Riemann; encontraron también que algunos estudiantes relacionaban el cálculo del área con la suma de un número de cantidades unidimensional, cercana a la idea de barrido del área de Cavalieri y que algunos combinaban ambas ideas. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes no mostraron comprensión de la relación entre las sumas de Riemann, el cálculo del área bajo la curva y la integral definida. Años después, en un estudio sobre la forma en la que los estudiantes explican el significado de la integral definida (Jones, 2015) se encontró, igualmente, que a pesar de que la interpretación mediante la suma de Riemann es más productiva para hacer sentido de la integral en problemas contextualizados, la mayoría de los 150 estudiantes que participaron en su estudio la describen como área bajo la curva o como antiderivada.

Distintos estudios disponibles en la literatura mencionan las dificultades de comprensión de la integral (Bajracharya, et al., 2012; Jones, 2013). Además, existen resultados que indican la dificultad que tienen los estudiantes de ingeniería, para establecer relaciones entre el límite de una sucesión de sumas de Riemann y el área bajo una curva, indicando que los estudiantes construyen un Objeto con diferentes niveles de desarrollo; además, se ha encontrado que también muestran dificultades para coordinar la sucesión con el límite de una sucesión (Boiguez, et al., 2010). Diversos trabajos señalan la importancia de reconocer la suma de Riemann como una suma de productos para poder interpretar el significado de la integral como área bajo la curva, que es, según los autores la interpretación más importante de la integral definida, mientras que si los estudiantes la interpretan como área bajo la curva, se limitan sus posibilidades de aplicar el concepto (Jones, 2013).

Otros estudios investigaron cómo los estudiantes de física aplican la noción de integral y la de área bajo la curva en la solución de problemas simples (Dong-Hai & Sanjay, 2011) y encontraron que los estudiantes no entendían la relación entre los conceptos relacionados con la integral y los problemas de física; tampoco comprendían esta relación cuando se les presentaban las gráficas correspondientes, a pesar de que podían afirmar que la integral era útil para calcular el área bajo la curva.

Se sabe que la derivada e integral son herramientas de gran utilidad en diversas disciplinas, como por ejemplo la física, ingeniería, economía y estadística y que la comprensión de estos conceptos permite una mejor comprensión del mundo. Algunos autores, por tanto, plantean, la necesidad de que los estudiantes logren una comprensión más profunda de dichos conceptos, aunque sea de forma intuitiva (Kouropatov & Dreyfus, 2014).

Las investigaciones antes mencionadas ponen de manifiesto que los estudiantes presentan dificultades importantes frente al aprendizaje del cálculo diferencial e integral y que, cuando terminan el curso de cálculo diferencial e integral de variable real, los conceptos de derivada y de integral que construyen quedan compartimentalizados, es decir, los alumnos no construyen relaciones claras entre ellos. Es por eso necesario intentar acercamientos diferentes con nuevos diseños didácticos. Este es justamente el interés de la presente investigación. En este trabajo se presenta una contribución a la literatura que consiste en diseñar y analizar una propuesta didáctica en la que se establecen relaciones simultáneas entre estos dos conceptos que dan origen al cálculo diferencial e integral.

Los estudios antes reportados corresponden al análisis por separado de los resultados de investigación acerca de la derivada o acerca de la integral. La originalidad de este trabajo consiste en tomar en consideración los resultados de investigaciones previas para diseñar una propuesta basada en una teoría de educación matemática en la que se integren los resultados de la literatura y se realiza una primera investigación sobre los resultados obtenidos de dicha integración. El objetivo de esta investigación consiste en valorar la evolución del Esquema del Cálculo Diferencial e Integral enseñado mediante el establecimiento de relaciones simultáneas entre los conceptos de derivada e integral.

## 3. MARCO TEÓRICO

La teoría APOE parte del análisis de los conceptos matemáticos, haciendo hincapié en las construcciones cognitivas necesarias para el aprendizaje. Toma como referencia las ideas que plantea Piaget en torno a cómo el estudiante pasa de un estado de conocimiento a otro (Dubinsky 1996; Czamocha, et al., 1999). El objetivo de la teoría subyace a la forma en que se aprenden y enseñan las Matemáticas de manera efectiva, estudiando cómo los estudiantes cambian de un nivel de conocimiento a otro; en este contexto, la definición que la teoría APOE da para el conocimiento matemático es: "*El conocimiento Matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas, problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas"* (Dubinsky, 1996, pág. 32). Por su parte, los mecanismos de construcción de este conocimiento están basados en la noción de "*abstracción reflexiva*" de Piaget (Trigueros, 2005).

Respecto de este aprendizaje, APOE pone énfasis en la actividad del estudiante cuando enfrenta un problema y resuelve nuevas situaciones con lo aprendido; pone atención a los posibles cambios en el conocimiento y los describe identificando cómo los alumnos desarrollan nuevas maneras de abordar los problemas o de justificarlos. Para ello, como ya se mencionó, la teoría propone cuatro estructuras mentales: Acción, Proceso, Objeto y Esquema cuyo acrónimo constituye el nombre de la teoría.

Se denomina Acción a la transformación de un objeto cognitivo que el estudiante percibe como algo externo, opera sobre él siguiendo instrucciones que percibe como externas; interiorizar esa Acción o Acciones, le permite tomar consciencia y control de ella o ellas, hacerla suya y generalizarla a todos aquellos casos en que la Acción o el conjunto de Acciones es pertinente.

Cuando un individuo repite y reflexiona sobre una Acción o varias Acciones, éstas pueden ser interiorizadas en Procesos. Es decir, la estructura conceptual de Proceso se construye cuando se repite una Acción y se reflexiona sobre ella interiorizándola, a través de oportunidades en las que el estudiante, sin necesidad de realizar todos los pasos de forma explícita, realiza la transformación, percibiendo así el Proceso como algo interno; el mecanismo de coordinación permite que los Procesos se combinen para generar un nuevo Proceso. Los Procesos pueden utilizarse en el sentido inverso del que fueron interiorizados, en este caso, el mecanismo involucrado es la reversión.

La estructura de Objeto se construye cuando el estudiante requiere de aplicar Acciones sobre un Proceso y se manifiesta por la posibilidad de utilizar o demostrar las propiedades del Objeto, así como la posibilidad de revertir el Objeto en el o los Procesos que le dieron origen. El mecanismo involucrado en la construcción de un Objeto es la encapsulación, otra forma de abstracción reflexiva que se evidencia cuando uno o varios Procesos se perciben como un todo, es decir como un Objeto, sobre el cual se pueden hacer Acciones; la encapsulación ocurre cuando es posible aplicar una Acción sobre un Proceso. Los Procesos son estructuras dinámicas, mientras que los Objetos son estructuras estáticas sobre las que las Acciones se pueden aplicar (Dubinsky et al. 2005 a).

Un Esquema es una colección de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas que un individuo utiliza como un todo en la solución de una colección de problemas del mismo tipo. El Esquema es una construcción dinámica que evoluciona conforme el estudiante construye nuevas estructuras y nuevas relaciones entre ellas, como se describirá más adelante. Un Esquema puede considerarse como un todo sobre el cual es posible efectuar nuevas Acciones; en ese caso se considera que se ha tematizado y se puede considerar como un Objeto sobre el cuál se pueden aplicar nuevas Acciones. La tematización se evidencia en las estructuras subyacentes que se observan cuando un estudiante es capaz de *"tomar consciencia"* de que todas ellas forman un todo coherentemente organizado. Piaget (1985), habla de tematización en varios de sus libros, por ejemplo, cuando habla de la abstracción reflexiva y cómo "*las acciones y operaciones se convierten en objetos tematizados de pensamiento"* (pág. 49), pero en APOE la noción de tematización se refiere al mecanismo involucrado en la construcción de un Esquema como Objeto.

Cada una de las estructuras que compone la teoría APOE se construye a través de un mecanismo mental: una Acción se interioriza en un Proceso mental, un Proceso se encapsula en un Objeto cognitivo, un Proceso puede ser invertido para construir otro Proceso, dos Procesos pueden ser coordinados para formar un nuevo Proceso, un Esquema puede ser tematizado en un Objeto cognitivo. En APOE no hay una diferencia entre lo que el sujeto construye y los conceptos concretos o abstractos con los que tiene contacto, sino una relación dialéctica entre ellos, (Piaget & García, 1982, 1989). De acuerdo con la teoría APOE, frente a situaciones problemáticas los individuos construyen y aplican estructuras mentales en su esfuerzo por entender los conceptos matemáticos mediante una constante transformación (Trigueros, 2005).

## 3.1 ESTRUCTURA DEL ESQUEMA

Como se indicó en párrafos anteriores, la estructura de Esquema se define como una colección de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas y las relaciones entre ellos de manera que, para el estudiante forman una estructura coherente. El estudiante puede estar consciente o no de las relaciones entre estas estructuras; la coherencia se demuestra por la capacidad del estudiante de reconocer las situaciones en las que el Esquema es aplicable y qué tipo de problemas pueden resolverse con él. Los Esquemas evolucionan en la medida que se establecen más relaciones entre sus componentes, se reconocen las transformaciones que esto involucra mediante los mecanismos de asimilación y acomodación de nuevas estructuras al Esquema.

Un Esquema se caracteriza por su dinamismo y su reconstrucción continua. Por lo tanto, los Esquemas son estructuras que se describen mediante su organización y las estructuras mentales que lo componen y que un estudiante muestra haber construido sobre un concepto matemático en un momento dado (Arnon, et al., 2014).

Según Piaget y García (1982), un esquema se construye únicamente cuando está funcionando y sólo funciona a través de la experiencia. Lo que es esencial no es la estructura del Esquema en sí, sino la actividad estructurante que lo hace surgir. Los Esquemas son dinámicos, evolucionan, según las relaciones que se construyan entre los conceptos. La descripción de esta evolución se hace mediante la "Triada" de Piaget y García (1982), que corresponde a una progresión de tres niveles: Intra-, Inter- y Trans- de estructuración. Los mecanismos que permiten pasar de un nivel a otro son la asimilación y la acomodación; cada nivel incluye distintos tipos de relaciones y transformaciones entre los componentes del Esquema, además del desarrollo de la coherencia del mismo. Cuando es necesario hacer Acciones sobre un Esquema o estudiar sus propiedades el Esquema se tematiza en un Objeto. En la teoría APOE el Esquema se utiliza para hacer las descripciones del conocimiento matemático a otro nivel de generalidad. El Esquema se distingue de la imagen conceptual porque en el primero hay coherencia y, además, cuando se ha tematizado y se requiere usar sus componentes, es posible destematizarlo (Arnon, et al., 2014).

En el nivel Intra- el estudiante enfoca cada componente del Esquema, las Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas individuales están aislados de otros objetos cognitivos de naturaleza similar construyéndose relaciones internas centradas básicamente en similitudes y diferencias; este nivel se manifiesta mediante el análisis de casos particulares que no están vinculados entre sí, o lo están, pero de manera insuficiente. En el nivel Inter- se comprenden las transformaciones entre las estructuras componentes del Esquema, esto es importante dado que permite la comparación de los casos particulares y la construcción de transformaciones al poner en evidencia tanto las diferencias como las correspondencias entre ellos. Por último, en el nivel Trans- surge la necesidad de determinar las razones tras esas transformaciones entre componentes del Esquema; éste se ve como un todo y se construye una estructura. El individuo puede dar cuenta de su composición, mediante una síntesis; cuando las transformaciones son "*dominadas y generalizadas permiten nuevas síntesis, o sea se construyen totalidades hasta entonces inaccesibles, con sus nuevas propiedades*" (Piaget & García, 1982, pág. 171).

Según Piaget y García, la transición entre los distintos niveles de un Esquema no se caracteriza por un período de incremento en el conocimiento con respecto a niveles anteriores, más bien hay una reinterpretación total de los fundamentos; el acceso al siguiente nivel requiere la reconstrucción de lo construido anteriormente, es decir, de su acomodación. Toda la construcción de conceptos tiene lugar mediante la evolución a través de los niveles de la triada, la que se manifiesta mediante los mecanismos de asimilación, acomodación y equilibración (Piaget, 1970). En el proceso de construcción del aprendizaje un estudiante construye diversos Esquemas que coexisten al tiempo que evolucionan, así algunos problemas pueden requerir la coordinación de distintos Esquemas, esto puede describirse mediante, lo que en la teoría APOE se conoce como interacción entre Esquemas (Arnon, et al., 2014).

En cada etapa de la triada, el estudiante reorganiza conocimientos cosntruidos durante la etapa anterior; el paso de una etapa a la otra incluye no sólo un aumento en los elementos del esquema, sino la construcción de nuevas formas de relaciones entre los elementos de éste (Arnon, et al., 2014).

La construcción del conocimiento es un proceso dinámico, los estudiantes se enfrentan a situaciones nuevas donde los conocimientos previos pueden ser reconstruidos, la noción de Esquema ayuda a los investigadores a comprender los cambios a medida que, nuevas Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas, relacionados con un concepto matemático o un tema de las matemáticas se construyen; además de los cambios en las nuevas relaciones, nuevas Acciones, Procesos, Objetos o Esquemas pueden asimilarse o acomodarse en un Esquema previamente construido.

La elección de este marco teórico se debe al éxito de la gran cantidad de investigaciones que nos preceden (por ejemplo Asiala, et al., (1997); Clark, et al., (1997); Czarnocha, et al., (2001); Badillo (2003); Sánchez-Matamoros, et al., (2008); Boiguez, et al., (2010) y Gutiérrez & Valdivé (2012)) y la necesidad de describir y trabajar con un ciclo metodológico que permita indagar en detalle cómo el cálculo diferencial e integral es construido por los estudiantes, mediante el diseño de un modelo hipotético, que se conoce como Descomposición Genética, que describe las construcciones necesarias para su aprendizaje y enseñanza describiendo las vinculaciones entre las estructuras mentales a través de la identificación de las interrelaciones posibles entre las estructuras relacionadas con la construcción de los conceptos.

## 4. METOLOGÍA

Se realizó un estudio cualitativo de carácter exploratorio que permitió comprender el fenómeno de forma íntegra mediante la observación, analizando el discurso de los alumnos y estableciendo relaciones entre sus componentes. Se siguió el proceso metodológico propio de la teoría (Arnon et al., 2014), tomando en consideración sus bases y sus postulados; la investigación se centra en el diseño de una descomposición genética de derivadas e integrales "*en simultáneo*", es decir, a construirse conjuntamente permitiendo generar un Esquema de la matemática muy distinto a lo disponible actualmente en la mayoría de las instituciones. Para llegar a este diseño, se revisaron descomposiciones genéticas de otros autores para la derivada y la integral, que es de lo que se dispone (Asiala, et al., (1997); Clark, et al., (1997); Baker, et al. (2000); Czarnocha, et al., (2001); Badillo (2003); Sánchez-Matamoros, et al., (2008); Boiguez, et al., (2010) y Gutiérrez & Valdivé (2012)) y, posteriormente, se diseñó la descomposición genética del cálculo diferencial e integral para describir la construcción de ambos conceptos centrales de esta disciplina simultáneamente en términos de un Esquema articulador. Esta descomposición genética es original, no obstante, en su diseño se consideraron los insumos de descomposiciones genéricas previas y de la revisión de literatura, dado que todo ello se refiere por separado a los conceptos de derivada y de integral; la descomposición genética del cálculo diferencial e integral y su esquema articulador se diseñó específicamente para este trabajo y es por ello que forma parte de la metodología. El diseño de esta descomposición genética puede considerarse, por sí misma, una contribución a la literatura. Con este diseño se planificó y diseñó la propuesta de aula con actividades para llevar a cabo en clases usando diversos dispositivos, como por ejemplo actividades experimentales de llenado y drenado de tanques construidos desde la noción de razón de cambio hasta actividades de reflexión en clase para integrar ambos conceptos; la asignatura implementada corresponde a la segunda dentro del plan de Ciencias Básicas en el área del cálculo (es posterior a *Introducción al Cálculo*); tiene una duración de un semestre, donde todos los cursantes rinden por primera oportunidad el curso. Al finalizar el curso se realizó una entrevista individual a los 17 estudiantes que cursaron la asignatura.

La entrevista se enfocó en 14 problemas distribuídos en cinco categorías de análisis: herramientas del cálculo, concepto de derivada, concepto de integral, relación entre derivada e integral y su aplicación; a su vez, está compuesta por subcategorías: desarrollo analítico, manejo de procesos infinitos, sumas de Riemman, recta tangente, métodos de integración, aplicaciones de la integral, interpretación de derivadas e integrales en distintas representaciones, problemas y el teorema fundamental del cálculo. Como la entrevista es semiestructurada durante la misma se hicieron preguntas que permitieron determinar las estructuras construidas por los alumnos y las relaciones entre estas estructuras, lo que sirvió para determinar la evolución del esquema del Cálculo Diferencial e Integral, identificando el camino seguido por los estudiantes para aprender los conceptos de derivadas e integrales.

Para analizar los resultados de cada alumno se revisó la entrevista completa, es decir los 14 problemas desarrollados y las intervenciones que se realizaron verbalmente durante el tiempo de la entrevista.

La DG del esquema del cálculo diferencial e integral que incluye la construcción tanto de la derivada como de la integral definida y de las relaciones necesarias entre ellas se muestra más adelante. Se parte con la razón de cambio y usando la Teoría APOE se diseña, se analizan y caracterizan los componentes principales de ésta y con esos componentes se construye el Esquema de CDI (la abreviatura usada para el cálculo diferencial e integral se presenta como CDI) que sirvió de base para el diseño de la enseñanza y para evaluar el aprendizaje de los estudiantes.

Se exhibe como resumen un mapa de la descomposición genética del cálculo diferencial e integral para ser enseñado en simultáneo con la trayectoria esperada de las construcciones mentales que se espera presenten los estudiantes (ver figura 1).

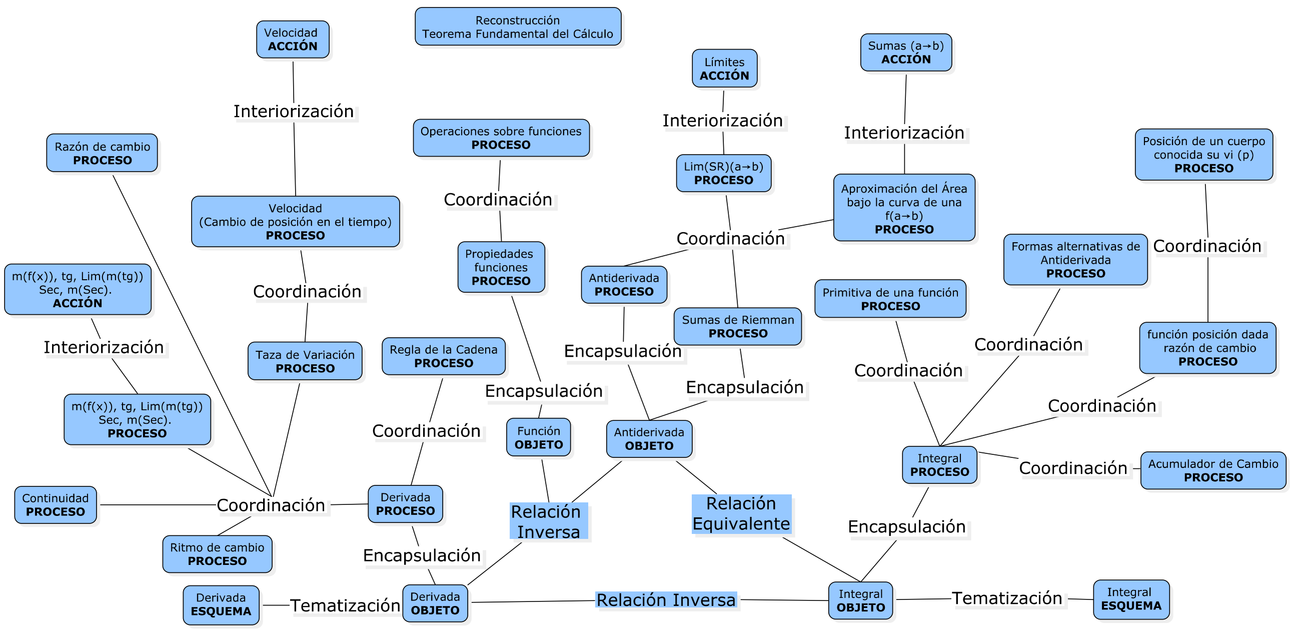


Figura 1: Mapa de la Descomposición Genética de derivadas e Integrales en simultáneo


Recepción:10/06/2020 Aceptación: 05/11/2020

## 4.1 Esquema y Niveles

Como se ha indicado, el Esquema de Derivadas e Integrales o Esquema del Cálculo Diferencial e Integral (Esquema CDI) tiene su foco en la construcción del Teorema Fundamental del Cálculo relacionando el Objeto función con la continuidad, la derivada y la integral.

El Esquema de Derivadas e Integrales (CDI), se evidencia con la habilidad para determinar las condiciones en las que pueden aplicar derivadas o pueden aplicar integrales en problemas de aplicación a cualquier ciencia en las que las condiciones de continuidad o discontinuidad están presentes, ya sea usando razón de cambio como Objeto, velocidad como Objeto, pendiente de la tangente o sus procesos asociados; análogamente en el caso de la anti-derivada considerada como función inversa de la derivada, permite resolver problemas de ecuaciones diferenciales de manera eficiente para tematizar el Esquema.

Como se desea analizar los conceptos que el estudiante puede o no evocar en la solución de problemas es que se definen los niveles de evolución del esquema del Cálculo Diferencial e Integral. Tomando en cuenta el tipo de relaciones entre los conceptos, así como la coherencia del Esquema se hace uso de la noción de evolución del Esquema de APOE. A continuación, se describen los niveles de desarrollo del Esquema de Derivada e Integrales CDI.

### 4.1.1 Nivel Intra-CDI:

Este nivel de desarrollo del Esquema CDI se identifica mediante la evidencia que se encuentra de que un estudiante interpreta la derivada como una razón de cambio y la relaciona con la pendiente de la recta tangente, además interpreta la integral como anti-derivada, analizando la continuidad de las funciones correspondientes. Si bien el estudiante puede establecer ciertas relaciones entre la derivada y la integral, los procesos de derivada y de integral permanecen aislados en la interpretación del estudiante en el sentido de que las relaciones construidas se basan en Acciones.

### 4.1.2 Nivel Inter-CDI:

El estudiante interpreta la derivada como una transformación inversa de la anti-derivada, que a su vez puede ser definida como integral. Cuando construye la derivada la relaciona como un ritmo de cambio, es capaz además de entenderla como la pendiente de la tangente de una función, pero además la relaciona con la velocidad de un cuerpo en cualquier punto; a su vez, construye una relación entre derivada e integral cuando aplica la transformación que ha realizado de la derivada como inversa de la integral construyéndola como una función que se puede denominar primitiva que corresponde a la función inversa de la razón de cambio y que es equivalente a encontrar la posición de un cuerpo conociendo su velocidad así como cuando encuentra la función a partir del conocimiento de la tangente.

### 4.1.3 Nivel Trans-CDI:

El estudiante reconstruye el teorema fundamental del cálculo relacionando la función primitiva con la integral, reconociéndola como una función derivable en un intervalo dada una función que es integrable sobre el mismo. Construye a la derivada de la función integral de la función (continua) como la propia función. La continuidad le permite generar análisis respecto de las características de una función, ya sea si esa función es la que se desea integrar o es la propia primitiva. Ve a la función que se quiere integrar como una tasa de variación y a la integral como un acumulador de cambio, reconociendo que dos primitivas de una misma función pertenecen a una familia.

Las relaciones construidas permiten que el estudiante, al momento de encontrarse frente a un problema que involucra el cálculo de derivadas y el cálculo de integrales, sea capaz de construir las representaciones para la derivada y la integral en cualquier representación pudiendo inclusive argumentar y resolver problemas simples de ecuaciones diferenciales ordinarias aplicadas a distintas disciplinas aplicando el teorema fundamental del cálculo. La coherencia de este Esquema se manifiesta en que el estudiante utiliza la regla de la cadena y la relaciona como consecuencia del proceso que involucra la demostración del primer teorema fundamental del cálculo, es decir, es capaz de determinar funciones compuestas observando su diferenciabilidad cuando éstas vienen de funciones diferenciables y es capaz de reconocer la derivada de una integral en la que un límite de integración es una función como una aplicación de la regla de la cadena.

## 4.2 Aplicación de la propuesta articuladora del cálculo diferencial e integral

Para llevar a cabo la aplicación de lo planificado en este modelo articulador del Cálculo Diferencial e Integral, se debieron realizar muchos ajustes que van desde el explicar a los estudiantes que los conceptos a trabajar incluyen lo que comúnmente se trabaja en dos asignaturas, correspondientes a Cálculo I y Cálculo II. Se firmó el consentimiento informado en el cual se incluyen especificaciones que corresponden a las actividades a realizar, además de que al finalizar la asignatura se debe participar en una entrevista y todo lo que involucra el trabajo ético con seres humanos. Además, se garantizó el acceso a los distintos laboratorios para la realización de las actividades teóricas y prácticas.

Luego de tener claridad de sus equipos de trabajo, los estudiantes recibieron distintos insumos para el desarrollo de sus actividades todos ellos diseñados en términos de la DG; al finalizar el curso, se desarrolló una entrevista semiestructurada, basada también en la descomposición genética del cálculo diferencial e integral, en la cual el entrevistador utilizó un guión de conducción para controlar la producción de información durante la sesión, la entrevista fue validada mediante juicio de expertos, correspondiente a 7 profesores de Cálculo de distintas universidades de la ciudad, con el objetivo de revisar la consistencia interna del instrumento. Como la entrevista fue semiestructurada, durante la misma se hicieron preguntas que permitieron poner en evidencia las estructuras construidas por los alumnos y las relaciones entre estas estructuras. Esta información posibilitó la determinación de la evolución del Esquema del Cálculo Diferencial e Integral, identificando el posible camino seguido por cada estudiante al aprender los conceptos de derivadas e integrales.

## 5. RESULTADOS

El análisis de las entrevistas detalla para cada estudiante el tipo de concepción que muestra en términos de la teoría APOE, el tipo de relación existente en cada una de las cuestiones consultadas y la relación dada por la construcción del esquema que ha evocado en ese momento.

Se muestra enseguida la caracterización de algunos estudiantes entregando el tipo de relación que exhibe como resultado del análisis respectivo basado en cada uno de los niveles del Esquema, señalando si los estudiantes se encuentran en un nivel Intra- CDI, Inter-CDI o Trans-CDI según corresponda.

### 5.1 Resultados según nivel del Esquema

Es importante mencionar que de los diecisiete estudiantes del curso a quienes se les aplicó la entrevista, 4 alumnos no se consideran en el estudio debido a que no se cuenta con los datos suficientes de sus reportes para tomar una decisión confiable.

Se presenta en primer término los resultados de aquellos alumnos que se consideró mostraron una construcción al nivel Intra -CDI del Esquema, posteriormente se discuten los hallazgos encontrados en aquellos alumnos que mostraron la construcción del Esquema en un nivel Inter -CDI y se termina mostrando las construcciones de los alumnos que dieron evidencia de haber construido un Esquema en el nivel Trans -CDI. Para efecto de este apartado se presentan ejemplos que permitieron la toma de decisiones de algunos alumnos representativos en cada uno de los niveles del Esquema:

#### 5.1.1 Resultados nivel Intra –CDI:

Seis alumnos mostraron evidencia de haber desarrollado su Esquema a un nivel Intra -CDI. Sus respuestas muestran que todos ellos interpretan la derivada como una razón de cambio y que han construido la relación de la derivada con la pendiente de la recta tangente, como Procesos u Objetos aislados de la integral la que interpretan como antiderivada también como Proceso u Objeto; las relaciones que muestran haber construido entre los componentes del Esquema son internas tanto para la derivada como para la integral, es decir, no muestran claramente haber construido relaciones de transformación entre los Objetos derivada e integral.

Del análisis realizado sobre el trabajo de los estudiantes al resolver las tareas planteadas, se toma, como punto de partida el contraste de la información obtenida de las respuestas de dos informantes que corresponden a los alumnos A-8 y A-10 dado que muestran evidencia relacionada con dos partes esenciales del Esquema, para después analizar el trabajo de otros alumnos.

Cuando el alumno A-8 resuelve el problema de encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva dada por $(x^2+y^2)^2=4xy$, en el punto (1,1), realiza la Acción de un cambio de variable *y= xt* que le permite manipular la expresión dada y escribir a la variable *x* como una función de *t* algebraicamente como la raíz de un cociente (fig. 2). No se observa, sin embargo, la construcción de la función implícita *y*. El alumno pone en evidencia que su Esquema de función no incluye aún este tipo de funciones y, por lo mismo, no ha construido el concepto de derivada implícita más allá de usar procedimientos semejantes a los usados en la clase como ejemplos realizando únicamente Acciones. La estructura de la derivada que muestra haber construido aparece así aislada de la de función.

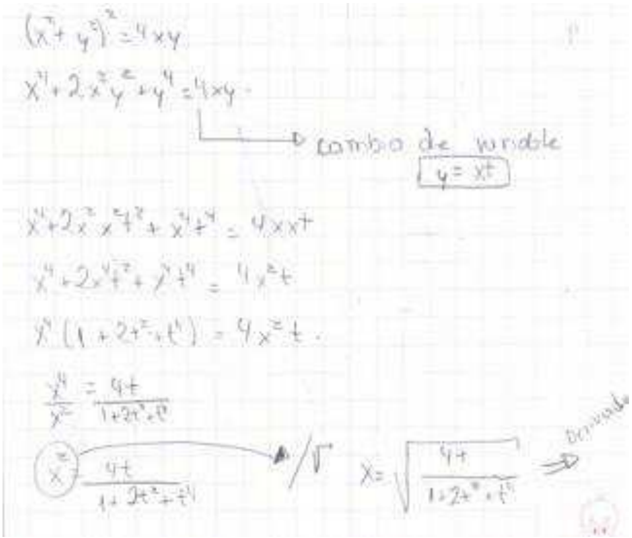


*Figura 2: Extracto del protocolo de A-8.*

Cuando se revisa el protocolo verbal del estudiante A-8 en el que se pregunta por la explicación sobre el proceso que realiza, el alumno indica: "*como dice en el problema recta tangente tengo que derivar";* al preguntar por la razón por la cual el realiza el cambio de variable, el alumno refiere: *"El cambio de variable al principio lo hago porque no se puede despejar" "tengo que despejar para poder derivar*".

El alumno, calcula la derivada utilizando las propiedades necesarias, indicando verbalmente: "*las propiedades para derivar me las sé todas, me las aprendí", "en este caso como es una raíz, escribo el cociente entre la derivada del argumento sobre el doble de la raíz*"; por lo que menciona el alumno se puede considerar que se limita a hacer Acciones relativas al ritmo de cambio sin mostrar siquiera interiorización, debido a que, por lo que afirma, aparentemente está resolviendo de memoria.

El trabajo del alumno en todas las actividades es similar al mostrado en el ejercicio anterior. Aun cuando resuelve correctamente los ejercicios que involucran el concepto derivada y muestra la construcción de las relaciones respecto a la derivada, el alumno muestra que la derivada forma parte de su esquema y que ha establecido una relación de corresposndencia entre la derivada considerada como Acción o Proceso y sus propiedades y con la recta tangente; se observa también que el alumno ha construido una relación entre la posición y la velocidad como la derivada de la función posición, aunque, al igual que en los demás ejercicios de la entrevista, la relación está basada únicamente en Acciones por lo que puede considerarse que las estructuras componentes del Esquema que pone en evidencia están prácticamente aisladas en su Esquema.

Posteriormente, al revisar los protocolos referentes a ejercicios que involucran la integral se observa que cuando


Recepción:10/06/2020 Aceptación: 05/11/2020

se le pide encontrar el área bajo una curva o entre dos o más curvas (ejercicio 3 ítem I y ejercicio 2 ítem III) el alumno analiza primero la situación desde el registro gráfico (fig. 3 y 5) para plantear posteriormente el problema en el registro analítico. El alumno muestra la posibilidad de pasar de un registro a otro de representación y de haber establecido una relación entre la antiderivada y la integración (fig. 4 y 6).

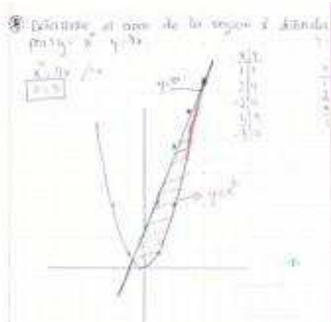

*Figura 3: Extracto del protocolo de A-8*

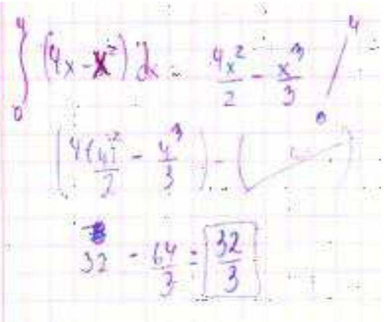

*Figura 4: Extracto del protocolo de A-8*

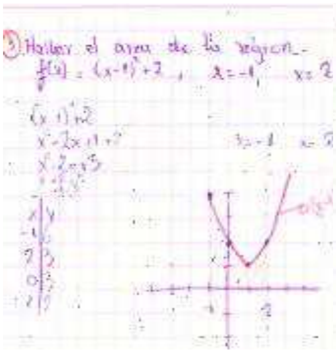

*Figura 5: Extracto del protocolo de A-8*

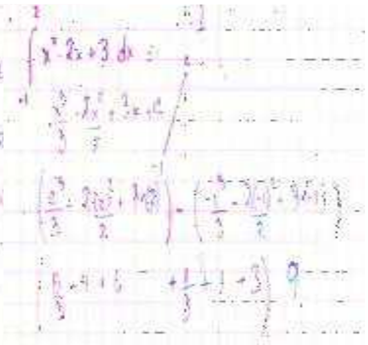

*Figura 6: Extracto del protocolo de A-8*

Al preguntar al alumno por la razón de la elección del proceso de desarrollo de los ejercicio, el alumno indica: "*siempre que me piden calcular el área bajo la curva yo grafico y miro donde se hacen los cortes del gráfico y eso lo anoto como parámetro de integración, despues miro la función que está arriba si hago un dx y escribo*", "*si son dos funciones las resto*, despues calculo la integral con las propiedades".

Se puede concluir que este alumno ha construido las relaciones antes mencionadas en términos de procedimientos memorizados, de manera que las estructuras del Esquema se pueden considerar como aisladas. Más aún, no resuelve los ejercicios en los que se necesita haber construido relaciones que van más allá de Acciones memorizadas entre los conceptos de derivada e integral, como los ejercicios Nº2 del ítem IV y Nº4 del ítem V, lo que pone claramente en evidencia que el Esquema CDI que muestra el estudiante se encuentra en un nivel Intra – CDI.

En contraste con A- 8 y otros estudiantes que mostraron construcciones semejantes, el alumno A-10 exhibe estrategias distintas en la construcción del Esquema, aunque su nivel de desarrollo es el mismo.  El alumno resuelve distintos tipos de integrales; tanto aquéllas que involucran polinomios como las que incluyen funciones trigonométricas; no obstante, la forma en que describe sus procedimientos pone en evidencia la existencia de secuencias de Acciones memorizadas que permiten relacionar algunos de los componentes del Esquema pero que al mismo tiempo permanecen aislados en términos de su comprensión por parte del alumno.

El alumno, aplica métodos de integración (método de sustitución o método de integración por partes) lo que da evidencia de que el alumno ha construido una relación entre la derivada y la integral que le permiten reconocer el método a utilizar y resolver problemas de cálculo de integrales de funciones complejas, como las incluidas en el ejercicio 1 del ítem III.

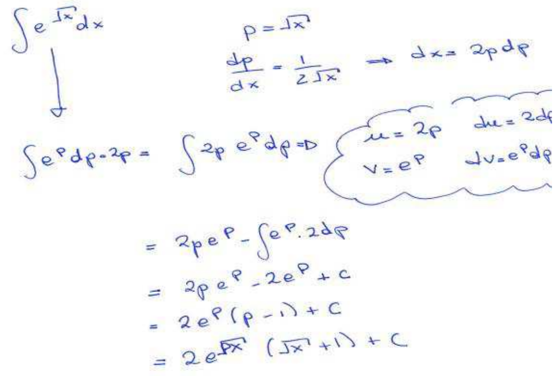

*Figura 7: Extracto del protocolo de A-10*

Al preguntar al alumno por la razón del uso de sustitución para resolver el problema Nº1 del ítem III, el alumno responde: "*como es una integral de Euler elevado a una función, escribí esa función de otra manera más fácil*", "*después que hago el arreglo, reemplazo y después quería integrar una inmediata, pero hice otra forma que uso cuando hay productos*".

Al revisar toda la entrevista completa, se encuentra evidencia de dominio en distintos métodos de integración, lo que nos permite inferir que parece haber construido una relación entre la integral y la derivada que le permite identificar cuál método convine utilizar para calcular integrales más complejas mediante conversiones en otras equivalentes, pero más simples utilizando las propiedades de la derivada como Objeto. Sin embargo, al momento de preguntar al alumno cuál es la relación entre derivada e integral el alumno dice "*sé que hay una relación, pero no la sé explicar*", esto nos lleva a concluir que la relación antes mencionada entre derivada e integral no se ha construido, lo que conduce a considerar que el Esquema que muestra se encuentra en un nivel Intra - CDI.

**5.1.2 Resultados nivel Inter – CDI:**

Luego del análisis de todo el trabajo presentado por los alumnos, se observó que 6 de ellos mostraban elementos comunes que, de acuerdo a la descomposición genética se consideran propios del nivel Inter– CDI del Esquema. Los alumnos evidencian comprensión de las transformaciones entre las estructuras que componen el Esquema CDI, no obstante, no evidencian las razones tras esas transformaciones y es posible que las relaciones que


Recepción:10/06/2020 Aceptación: 05/11/2020

presentan no les permitan resolver situaciones más complejas. Mostramos algunas evidencias del trabajo de algunos alumnos que muestran esta construcción.

A- 2 ilustra que, si bien algunos alumnos cometen errores algebraicos en el proceso de solución de algún ejercicio, sus explicaciones contienen evidencia de la construcción de relaciones de transformación entre algunas de los componentes del Esquema CDI. Las figuras 8 y 9 muestran su trabajo en el ejercicio Nº3 del ítem I.

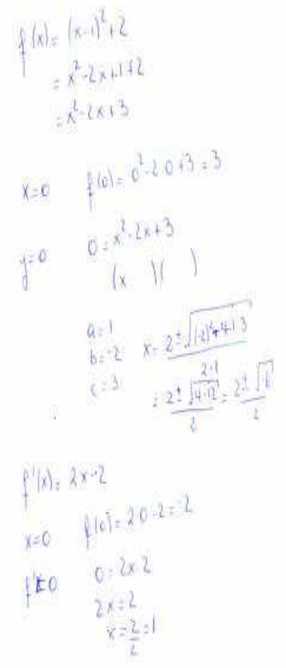

*Figura 8: Extracto del protocolo de A-2*

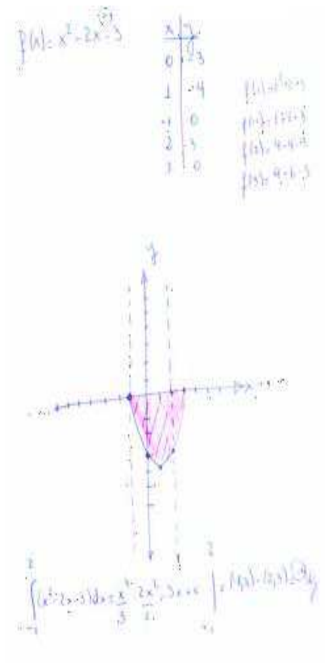

*Figura 9: Extracto del protocolo de A-2*

Al preguntarle sobre las variables que observa se presentan en el problema y cómo las relaciona para poder dar respuesta al ejercicio, indica verbalmente: "*El área bajo la curva está relacionada con el cálculo de la integral definida de una función, .....puedo usar aproximación mediante sumas, pero es más fácil graficar y luego integrar......".* Al cuestionar al estudiante sobre la forma en la que identifica los mejores puntos para dibujar la gráfica, indica: " *yo, ...lo que hago es tomar la función y calcular la primera derivada, eso lo igualo a cero y los valores que me da son los que primeramente reemplazo para que me dé puntos para el gráfico, esos son importantes porque pueden ser máximos o mínimos"* El alumno, verifica puntos de inflexión y resuelve de forma gráfica y analítica evidenciando que relaciona la aproximación del área bajo la curva de una función con la identificación de la función de posición de un cuerpo cuando se conoce la función razón de cambio.

*Figura 2: Extracto del protocolo de A-2*

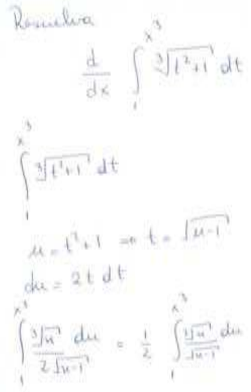

*Figura 11: Extracto del protocolo de A-2*

El proceso presentado por el alumno para resolver el primer ejercicio del ítem III, (fig. 10) indica que el estudiante interpreta la derivada como una transformación inversa de la anti-derivada, debido a su uso constante en el problema; parte realizando un cambio de variable, al reemplazar en la integral utiliza el método de integración por partes para resolver. En el caso del último ejercicio de la entrevista (fig. 11) el alumno establece un cambio en las variables que, si bien podríamos interpretar como una actividad memorizada.

Los elementos comunes entre los 6 estudiantes se presentan por las transformaciones que muestran haber construido en las interpretaciones de la derivada y la anti-derivada como transformaciones inversas una de la otra, y una clara interpretación de la relación entre ellas en la definición que entregan para la integral. Al construir la derivada, los alumnos la relacionan con un ritmo de cambio, aplican la transformación que han realizado de la derivada como inversa de la integral construyéndola como una función que se puede denominar primitiva que corresponde a la función inversa de la razón de cambio y que consideran en la solución de problemas como equivalente a encontrar la posición de un cuerpo conociendo su velocidad, o a encontrar una función a partir del conocimiento de la pendiente de tangente a su gráfica. Todos estos elementos se consideran en la descomposición genética del Esquema CDI como correspondientes a un nivel de desarrollo Inter-CDI.

### 5.1.3 Resultados nivel Trans – CDI:

Una de las características del nivel Trans-CDI, es que el esquema del cálculo diferencial e integral en simultáneo se ve como un todo que sintetiza las relaciones construidas en la estructura del cálculo diferencial e integral bajo esta nueva mirada. Recalcaremos en este punto que en el nivel Trans-CDI, se espera la reconstrucción del teorema fundamental del cálculo, la relación entre la función primitiva y la integral y su reconocimiento como función derivable en un intervalo dado y una función que es integrable sobre el mismo. El alumno debe ser capaz de observar la diferenciabilidad de funciones compuestas y relacionarlas con la regla de la cadena, debe además construir la derivada de la función integral de la función como la propia función, la función a integrar la reconoce como una tasa de variación y a la integral como un acumulador de cambio; así forma relaciones fuertes y relaciones de equivalencia que le permiten resolver problemas que involucran derivadas e integrales usando cualquier registro e incluso utilizarlas en la solución de ecuaciones diferenciales simples.

Luego de la revisión exhaustiva tanto de los protocolos escritos de la entrevista como de lo recogido en las intervenciones que se realizan oralmente en ésta, se puede indicar que solo un estudiante, A-3, mostró evidencia de haber desarrollado el Esquema al nivel Trans – CDI; en su trabajo se observan claras diferencias con los otros estudiantes del curso, por ejemplo, cuando se le solicita al alumno resolver el problema siguiente: "*Para la función* $f(x) = \frac{-8-x^3}{x}$ $f(x) = \frac{-8-x^3}{x}$ $f(x) = \frac{-8-x^3}{x}$ *encontrar: puntos máximos y mínimos, intervalos de monotonía, puntos de inflexión y concavidades*", muestra haber construido las relaciones requeridas para el Esquema CDI en la DG. El alumno indica que: *"ordeno algebraicamente, luego derivo la función y luego igualo a cero para encontrar los puntos críticos…", "luego de la evaluación del punto máximo", "analizo siguiendo parámetros establecidos, la monotonía de la función, para luego encontrar los puntos de inflexión*"; demuestra así reconocer una relación entre la derivada y la razón de cambio (fig. 12).

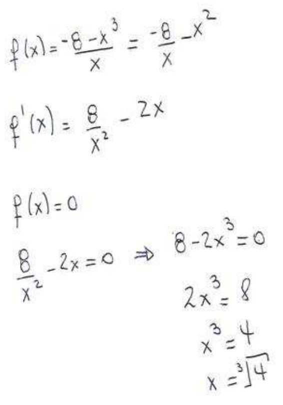


Figura 12: Extracto del protocolo de A-3

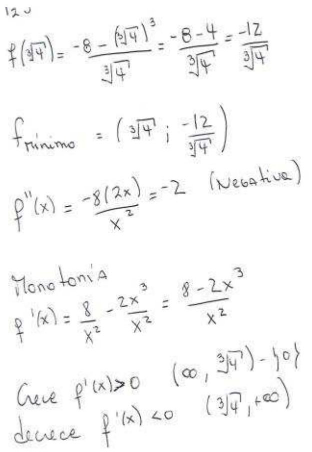


Figura 13: Extracto del protocolo de A-3

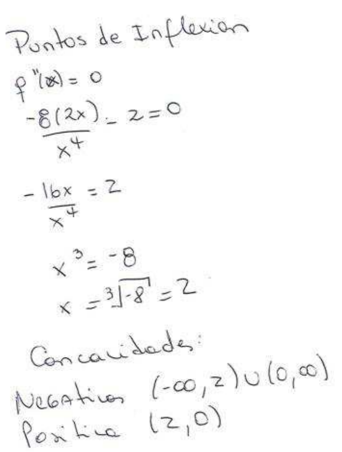


Figura 14: Extracto del protocolo de A-3

Además, analiza sin problema los procedimientos conocidos para determinar la monotonía y para encontrar los puntos de inflexión (fig. 13 y 14); el alumno demuestra también haber construido la relación entre la derivada y la razón de cambio al interpretar la derivada de la función integral de la función (continua) como la propia función, y considerando que la continuidad le permite analizar una función dada y determinar sus características para decidir si esa función es la que se desea integrar o es la propia primitiva cumpliendo con la actividad matemática esperada que incluía que el alumno realizara el cálculo de la primera y segunda derivada para estudiar los extremos de la función. Para ello estudia el dominio y calcula la primera derivada, además, analiza puntos críticos incluyendo los puntos candidatos a ser extremos, aquellos que anulan la primera derivada junto con los extremos de los intervalos, calcula la segunda derivada identificando el signo en los puntos que anulan a la primera derivada, finalmente estudia la monotonía mediante el análisis del signo de la derivada en los intervalos del dominio que generan los puntos críticos y determina los puntos en los que la derivada existe y aquéllos en los que no existe con fluidez relacionando con la continuidad de la función.

Posteriormente, al pedir hallar el área de la región bordeada por las gráficas de $f(x) = (x-1)^2 + 2;\ x = -1; x = 2$ y el eje X, da evidencia de que relaciona sin problema las sumas de rectángulos sobre los intervalos, lo que permite indicar que ha construido relaciones entre los conceptos de función, intervalos en el dominio de la función, área bajo la curva y suma de Riemann como Objetos sobre los que puede realizar Acciones. Por ejemplo, el alumno determina un intervalo pertinente en el dominio de la función, [-1,2], y lo divide en n sub-intervalos de igual longitud. Encuentra de manera general, posteriormente, el enésimo elemento de la suma y determinar el límite de la suma de Riemann. Todo ello muestra evidencia de la encapsulación de los procesos de sumas de Riemman en el Objeto sumas de Riemman así como la construcción de relaciones entre los elemento del Esquema de integral relacionados con ellas.

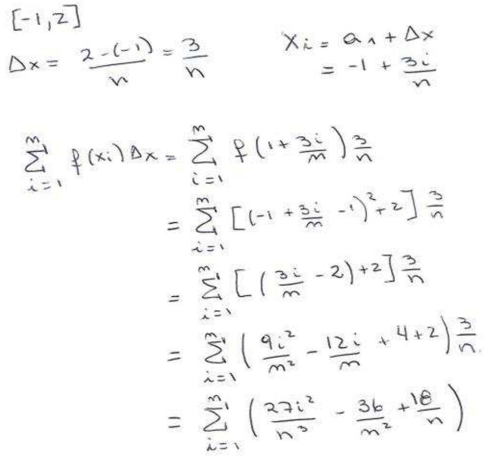


Figura 15: Extracto del protocolo de A-3


Recepción:10/06/2020 Aceptación: 05/11/2020

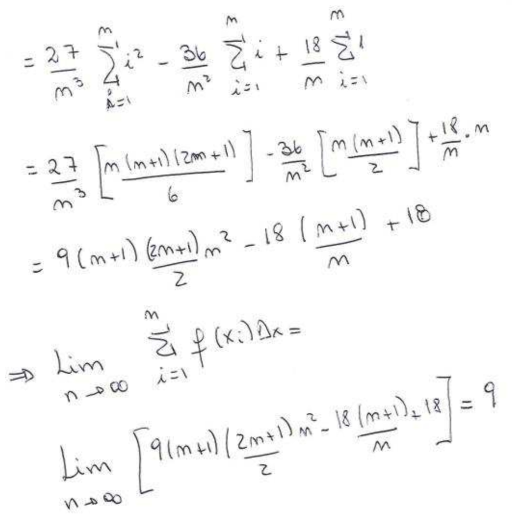

*Figura 16: Extracto de protocolo de A3*

Cuando se le solicita hallar la ecuación de la recta tangente a $f(x) = Sen\,x$ $f(x) = Sen\,x$, que pasa por los puntos de intersección entre. $f(x) = Sen\,x\;y\;f(x) = Cos\,x, entre\;[0,{}^{\pi}/_{2}]$ $f(x) = Sen\,x$, el alumno describe las operaciones que realizaría para resolver el problema sin necesidad de hacerlas evidenciando que ha construido una relación entre la ecuación de la recta tangente con el cálculo de la derivada en un punto y que es capaz de expresar a la derivada como una transformación de la función que es equivalente a encontrar la pendiente de la recta tangente que utiliza junto con los puntos dados para calcular la recta tangente. Por ejemplo, indica: "*Se encuentran las coordenadas del punto y se encuentra la pendiente de la recta tangente….. Se halla la derivada dy/dx* $\frac{dy}{dx}$ *evaluada en el punto de tangencia para encontrar la pendiente y luego con el punto hallado se encuentra la ecuación de la recta usando la expresión para punto pendiente*". Muestra, además, un uso flexible de esta técnica cuando, por ejemplo, enfrenta el problema de; encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $(x^2 + y^2)^2 = 4xy$ $(x^2 + y^2)^2 = 4xy$ , en el punto (1,1). Para resolverlo recurre naturalmente a la derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente en un punto. El Alumno indica: "*Utilizo la derivación implícita, luego encuentro la pendiente de la recta tangente, así calculo dy/dx* $\frac{dy}{dx}$*evaluada en un punto de tangencia para así encontrar la pendiente y luego con el punto encuentro la ecuación de la recta, a eso llamo ecuación de punto pendiente*".

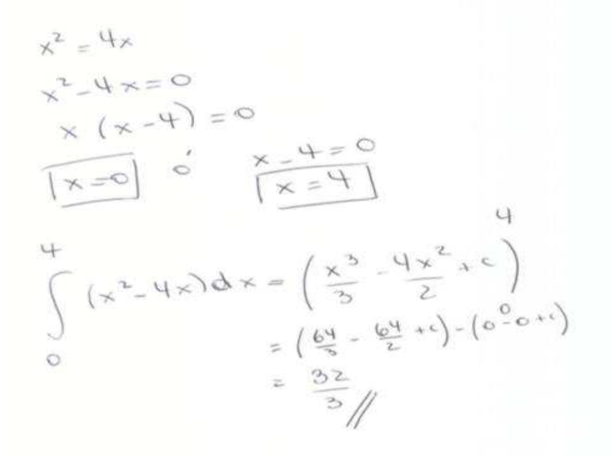

*Figura 17: Extracto del protocolo de A-3*

Este alumno usa integrales definidas para determinar áreas bajo curvas. Por ejemplo, cuando se le pide determinar el área de la región R definida por: $y = x^2\;\;y\;\;y = 4x$ $y = x^2$ $y = 4x$procede a igualar las ecuaciones y encuentra los ceros de la función a integrar; resta las funciones para proceder a integrar el polinomio resultante usando el teorema fundamental del cálculo y, finalmente calcular el área correspondiente.

En otro problema utiliza varios registros de representación para interpretar áreas bajo curvas. Se vale, por ejemplo, del gráfico para analizar el comportamiento de la función y así, igual que en el caso anterior, encontrar el área bajo la curva, que en este caso corresponde al valor promedio.

Cuando busca obtener los puntos extremos en [0, 2π] $[0,2\pi]$ para la función$F(x) = \int Sen^2 tdt$$F(x) = \int Sen^{\,2} t\; dt$, muestra que relaciona la integral con la derivada como operaciones inversas, denomina "*derivada de una primitiva*" a la función Sen $^2$ x$Sen^2 x$, iguala a cero y encuentra trigonométricamente el ángulo solicitado. En general, su trabajo con integración muestra que su Esquema CDI contiene como elemento a la integral como un Objeto y que ha establecido relaciones de transformación con el área bajo la curva.

Frente al problema "*Si la distancia al suelo de una pelota que cae está dada por la función* $x(t) = 112t - 16t^2$ *x(t) = 112t - 16t*$^2$ *y la velocidad inicial es de 112 cm/s. ¿Cuál es la velocidad de la pelota a los 2s.? y ¿En qué tiempo alcanza la altura máxima?*" recurre, de inmediato, al cálculo de la derivada de la posición la cual hace cero para encontrar el tiempo en que la pelota alcanza la altura máxima.

El alumno indica verbalmente: "*Existe una relación entre la posición de un objeto y la velocidad y aceleración, por eso es que matemáticamente, si necesito de una de ellas recurro a la otra*", "*es como una escalera, posición, derivada y segunda derivada, esa escalera la veo para el otro sentido*", "*lo que quiero decir con eso es que puedo calcular la posición si tengo la aceleración o la velocidad*".

Al revisar del protocolo se encuentra que cuando enfrenta problemas de aplicación, como cuando se le solicita resolver paso a paso el siguiente problema: En un depósito cónico se vierte agua a razón de 9 pies$^2$/min. El tanque tiene una altura de 10 pies y un radio de 5 pies. ¿Con que rapidez sube el nivel del agua cuando la profundidad es de 6 pies? O se le pregunta ¿Cuál es el radio y la altura de un cilindro recto de área igual a 15m$^2$, con volumen máximo?; el alumno trabaja, en el segundo problema con facilidad, calcula el volumen y luego usa la diferencial de la función volumen para encontrar el radio, mostrando que ha construido relaciones entre derivadas e integrales. En el primer problema es posible observar también cómo el alumno hace uso de las relaciones entre velocidad, razón de cambio y derivada, para resolver problemas en el área de la ingeniería.

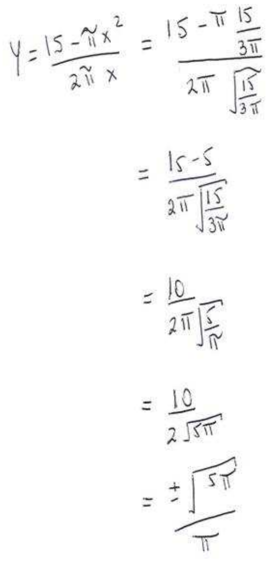

*Figura 18: Extracto del protocolo de A-3*

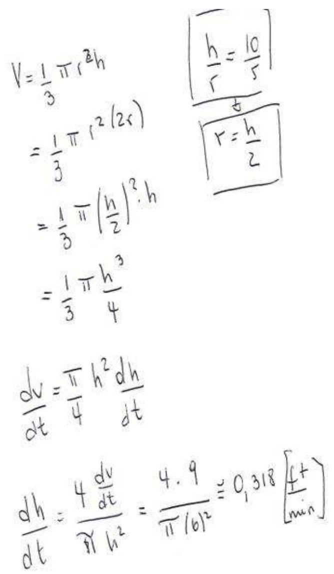

*Figura 3: Extracto del protocolo de A-3*

De igual forma cuando se pide encontrar características de un cuerpo geométrico del que se conoce su volumen, el alumno recurre a la derivada de una función y a la búsqueda de máximos en ella (fig. 18 y 19). El alumno representa la velocidad con la que sube el nivel de agua en un tanque cónico lo que evidencia la construcción de una relación entre el volumen y la rapidez; muestra además la construcción de relaciones cuando se le solicita encontrar el radio de un cilindro y algunos de los elementos requeridos para este tipo de construcción, u otras aplicaciones que requieren del uso del teorema fundamental del cálculo. El alumno muestra la capacidad de trabajar con el problema en el que es necesario reconocer una función compuesta definida mediante una integral, que los demás alumnos no fueron capaces de reconocer y la capacidad de aplicar la regla de la cadena en su solución; ello constituye una evidencia clara de que ha construido un Esquema coherente y que su nivel desarrollo corresponde al Trans-CDI, como se muestra en la siguiente descripción:

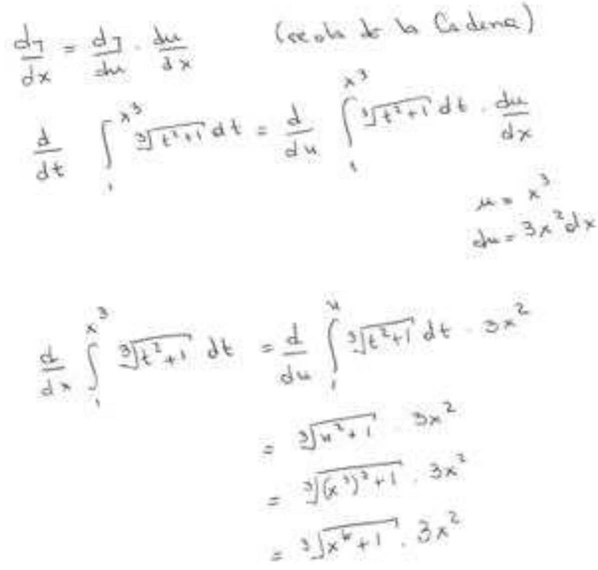

*Figura 20: Extracto del protocolo de A-3*

Al pedir que resuelva: $\frac{d}{dx}\int_1^{x^3}\sqrt[3]{t^2+1}dt$ $\frac{d}{dx}\int_1^{x^3}\sqrt[3]{t^2+1}dt$ y explique de forma detallada su procedimiento y formule una justificación de lo que hace, A-3, indica: "*recurro rápidamente a la regla de la cadena, hago uso de esta propiedad porque sé que la derivada con la integral son operaciones inversas*"; "*luego hago cambio de variable porque debe componer la función de forma de poder resolver con mayor facilidad*", "*Esa función dentro de la integral es una derivada de algo, o sea de otra función, para encontrarla es que uso diferentes propiedades*". De su trabajo podemos indicar que el alumno reconstruye el teorema fundamental del cálculo relacionando la función primitiva con la integral, reconociéndola como una función derivable en un intervalo dada una función que es integrable sobre el mismo. La coherencia del Esquema que A-3 ha construido se manifiesta en que el estudiante utiliza la regla de la cadena y la relaciona como consecuencia del proceso que involucra la demostración del primer teorema fundamental del cálculo, es decir, es capaz de determinar funciones compuestas observando su diferenciabilidad cuando estas vienen de funciones diferenciables. A-3 muestra claramente, tomando en consideración todo su trabajo, la construcción del nivel Trans- CDI del Esquema.

En resumen: se encontró que 6 estudiantes muestran un Esquema CDI en el nivel Intra-CDI de evolución; en términos generales se observa que estos estudiantes han acomodado a través del curso nuevas estructuras al Esquema CDI mas no han construido relaciones que vayan más allá de saber que pueden hacer uso de distintas estructuras conjuntamente para resolver cierto tipo de problemas. Otros 6 estudiantes mostraron la construcción del Esquema CDI en el nivel Inter- CDI; estos alumnos mostraron la construcción de relaciones de transformación tanto entre las estructuras ligadas a la derivada como entre aquéllas ligadas a la integral. Este grupo de estudiantes mostró la construcción de algunas relaciones de transformación entre las estructuras que componen el Esquema y entre ellos hubo diferencias en las relaciones de transformación construidas.

A diferencia del grupo anterior de estudiantes, estos alumnos mostraron que posiblemente el énfasis en el curso sobre la relación de la derivada con la integral les permitió construir las razones de ser de las relaciones construidas entre sus elementos. Podría, por último, parecer que el hecho de que un solo alumno mostrara la construcción de un Esquema CDI coherente en el nivel Trans-CDI es un resultado pobre en relación al curso, pero esto no es así. La construcción del nivel Trans- para cualquier esquema es difícil de lograr y, en general, toma más tiempo que la duración de un curso. Es por ello que puede considerarse que fueron las oportunidades de reflexión sobre las relaciones entre los conceptos del cálculo diferencial e integral y el hecho de tratar los conceptos de ambos conjuntamente desde el inicio del curso las que promovieron la evolución más rápida del Esquema de A-3; si, además, se toma en cuenta que el Esquema de 7 de los 13 estudiantes considerados mostró una evolución favorable, podría validar la propuesta como positiva en términos del aprendizaje de los alumnos.

## 6. CONCLUSIONES

La descomposición genética fue un insumo valioso para la planificación y preparación del curso. En los resultados de la investigación se puso de manifiesto cómo varios alumnos construyeron no solamente estructuras del cálculo diferencial e integral sino también relaciones entre los conceptos involucrados en cada uno de los Esquemas y relaciones entre los dos Esquemas que se evidenciaron en una construcción Inter-CDI e incluso Trans-CDI al nivel de un primer curso de esta disciplina.

La implemenación de la estrategia didáctica basada en las construcciones del Esquema CDI implica un doble cambio de paradigma en la enseñanza del cálculo diferencial e integral. La efectividad de la propuesta implicó el uso de distintas metodologías de enseñanza y la construcción dispositivos didácticos para promover continuamente la reflexión de los estudiantes sobre los conceptos que se fueron introduciendo y las relaciones entre ellos. El uso de la teoría APOE y de la descomposición genética permitió ir construyendo un todo integrador que permite evidenciar los problemas que se presentan en el entendimiento del cálculo diferencial e integral desde la perspectiva de quien enseña y desde la perspectiva de quien aprende.

La pregunta que se presentó en esta parte de la investigación indica: ¿Cómo evoluciona el Esquema de cálculo diferencial e integral a lo largo del planteamiento didáctico sugerido?

A través del análisis de los datos fue posible encontrar evidencia de la evolución del Esquema CDI construido por distintos alumnos. La identificación de las tres etapas de evolución del Esquema puede considerarse una contribución de este estudio, puesto que develan las construcciones descritas en la descomposición genética logradas por los estudiantes del curso experimentado.

La propuesta didáctica planteada en esta investigación muestra su efectividad en el logro de estos objetivos respecto a la construcción del Esquema del cálculo Diferencial e Integral.

Refinar la descomposición genética es parte de la metodología de la teoría APOE. En el caso de este trabajo, es primordial, como trabajo a realizar en un futuro próximo, revisar las trayectorias seguidas por los estudiantes a la luz de la descomposición genética para valorar, tomando en consideración otros datos con los que se cuenta, los alcances de la propuesta didáctica diseñada con mayor detalle y detectar aquellas construcciones que deberán añadirse o eliminarse en su refinamiento.

Respecto de las construcciones que se plantearon a partir de los conocimientos previos, será necesario establecer Acciones que permitan al estudiante encontrar el valor promedio de funciones, debido a que se observaron muchas dificultades en relación con este concepto. Es necesario además coordinar el límite como Proceso con la derivada como Proceso en la antiderivada como Proceso para hacer posible su encapsulación en el Objeto Antiderivada. Esto haría posible que estos Objetos se puedan relacionarse entre sí para favorecer la construcción del Esquema CDI y su evolución más allá del nivel Intra- CDI para un mayor número de estudiantes.

La propuesta didáctica presentada en este trabajo dio muestras de ser eficaz. Se encontró que ofrece a los estudiantes oportunidades de reflexión sobre las estructuras que componen el Esquema CDI y de esta manera mayor posibilidad de un aprendizaje más profundo del cálculo diferencial e integral de la que se logra a partir de la forma de enseñarlo que se ha utilizado durante décadas. También podría beneficiar a los profesores presentando un conjunto de actividades que pueden ser una ayuda para trabajar y evaluar el trabajo de los estudiantes.

## 7. REFERENCIAS

Arnon, I., Cotrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. New York: Springer.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. (1997 a). The development of students graphical undertanding of the derivate. Journal of Mathematical Behavior, 16, 399-431.

Badillo, E. (2003). La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia. Colombia: Tesis.

Badillo, E., Azcarate, C., & Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) en profesores de Matemáticas. . Enseñanza de las Ciencias, , 29(2), 191–206, 191-206.

Bajracharya, R., Wemyss, T., & Thompson, J. (2012). Student interpretation of the signs of definite integrals using graphical representations. In C. Singh, N.S. Rebello, P. Engelhardt (Eds.),. 2011 Physics Education Research Conference, AIP Conference Proc.

Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. Journal for Research in Mathematics Education, 31, 557-578.

Boigues, F., Llinares, S., & Estruch, V. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías con las ciencias de la naturaleza. Un análisis a través de la lógica Fuzzy. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 13(3), 255-282.

Bressoud, D., Mesa, V., & Rasmussen, C. (2015). Insights and recommendations from the MAA National Study of College Calculus. . New York: MAA Press.

Carabús, O. (2002). El Aprendizaje del Cálculo en la Universidad. La Conceptualización de la Derivada de una Función y sus niveles de Comprensión. Congreso Regional de Ciencias y Tecnologías. Universidad Nacional de Catamarca.

Clark, J., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeCries, D., St. John, D., . . . Vidakovic, D. (1997). Constructing a Schema: The case of the chain rule. En Journal of Mathematical Behavior, 16(4), 345-364. .

Cooley, L., Trigueros, M., & Baker, B. (2007). Schema thematization: a framework and an example. Journal for Research in Mathematics Education., 38(4), 370-392.

Cornu, B. (1981). Quelques obstacles a l'apprentissage de la notion de limite [Some obstacles to learning the concept of limit] . Recherches en Didactique des Mathematiques 4, 236–268

Czamocha, B., Dubinsky, E., Prabhu, V., & Vidakovic, D. (1999). One theoretical perspective in undergraduate mathematics education research .In0.Zaslaysky(Ed.),. Procedingsofthe 23rdConferenceofPME, 1, págs. 95-110. Haifa, Israel.

Czarnocha, B., Dubinsky, E., Loch, .. ,., & Vidakovic, D. (2001). Conceptions of area in students and history . The College Mathematics Journal, 32(2), 99- 109.

Dong-Hai, N., & Sanjay, R. (2011). Students' understanding and application of the area under the curve concept in physics problems. Physics Review ST. . Phyics Education Research, 7, 24-33.

Dubinsky, E. &. Lewin, P. (1986). Reflective abstraction and mathematics education: The genetic decomposition of induction and compactness. Journal of Mathematical Behavior, 5, 55–92.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. Educación Matemática, 8(3), 24-41.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M., & Brown, A. (2005 a). Some historical issues and paradoxes regardind the concept of infinity: An APOS analysis:Part 1. Educational Studies in mathematics.

Fuentealba, C., Badillo, E., Sánchez-Matamoro, G., & Cárcamo, A. (2019). The Understanding of the Derivative Concept in Higher Education . Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15(2).

Gutiérrez, L., & Valdivé, C. (2012). Una descomposición Genética del concepto de derivada. Gestión y Gerencia.

Jones, S. (2013). Understanding the integral: Students' symbolic forms. The Journal of Mathematical Behavior, 32, 122-141.

Kouropatov, A., & Dreyfus, T. (2014). Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation. ZDM Mathematics Education, 46, 533-548.

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. Educational Studies in Mathematics, 14(1), 1-18.

Piaget, J. (1970). Epistemología Genética.

Piaget, J. (1985). The equilibration of cognitive structures. (O. w. 1975, Ed.) Chicago: University of Chicago Press.

Piaget, J., & García, R. (1982). Psicogénesis e Historia de la Ciencia. Siglo XXI.

Piaget, J., & García, R. (1989). Hacia una lógica de las significaciones. Barcelona: Gedisa.

Pino-Fan, L. R., Gordillo, W., Font, V., Larios, V., & Bredas, A. (2018). Analysis of the meanings of antiderivative used by tudents of the first engineering courses. International Journals of Science and Mathematics Education, 16(6), 1091- 1113.

Robert, A. (1982). L'Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'Enseignement Supérieur. Recherches en Didactique des Mathematiques, 3(3), 307–341.

Sanchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La compresnsión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa., 11(2), 267-326.

Sepúlveda, C., & Gonzalez, M. (2015). Un modelo cognitivo para la comprensión profunda de la regla de la cadena. Paradigma, 36(2), 146-176.

Sfard, A. (1988). Operational vs. structural method of teaching mathematics—case study. In A. Borb as (Ed.),. En H. F. Vespr em (Ed.), Proceedings of the Twelfth Conference for the Psychology of Mathematics Education , 2, págs. 560-567.

Tall, D. (1990). Inconsistencies in the learning of Calculus and Analysis. . Focus on Learning Problems in Mathematics , 12(3/4), 49-63.

Tatar, E., & Zengin, Y. (2016). Conceptual Understanding of Definite Integral with GeoGebra, Computers in the Schools. Theory, and Applied Research, 33 (2), 120-132.

Thompson, P., & Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. In: Carlson, M.;Rasmussen, C, 43-52.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. Educación Matemática, 17(1), 5-13.

Trigueros, M., & Escandon, C. (2008). Los conceptos relevantes en el aprendizaje de la graficación.. Revista Mexicana de Investigación Educativa, 13(36), 59–85.

Wagner, J. F. (2018). Student' obstacle in using Riemann um interpretations of the definite integral. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4 (3), 327- 256.

**Patricia Estrella Rojas Salinas**

Doctor en Enseñanza de las Ciencias, mención Matemática; otorgado por la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN), Argentina. Magíster en Enseñanza de las Ciencias, mención Matemática; otorgado por la Universidad del Bío-Bío, Chile. Profesor de Matemática y Física, Universidad del Bío- Bío, Chile. Diplomado en Neurociencia y Educación, Universidad de Concepción, Chile